СЪДЪРЖАНИЕ

ПРЕДГОВОР

В основата на изследванията и резултатите, описани в настоящата книга, стои следната задача:

В триъгълника ABC, за който $AC > BC$, отсечките CL ($L \in AB$) и CK ($K \in AB$) са съответно вътрешната и външната ъглополовящи при върха C, а M е средата на страната AB. Върху отсечката CM е взета точка P така, че $\sphericalangle APM = \sphericalangle BAC$. Да се докаже, че:

а) точките C, K, L и P лежат на една окръжност;

б) ако $AP \cap BC = A_1$ и $BP \cap AC = B_1$, то точките C, A_1, P и B_1 лежат на една окръжност.

Автор на тази задача е Христо Лесов, учител по математика в Математическа гимназия – гр. Казанлък, бивш олимпиец, носител на медал от Международна олимпиада по математика и признат специалист в областта на педагогиката на математиката. Самата задача е публикувана в сп. "Математика и информатика" (2007, № 2 [11]). В условието има ограничително условие за вида на триъгълника. Оказва се, че то може да не се взима под внимание и задачата да се обобщи по подходящ начин, за да има смисъл за произволен триъгълник. Предлаганото в тази книга обобщение е свързано с определянето на по една точка върху всяка от трите медиани на $\triangle ABC$ по подобие на точката P върху медианата CM от условието.

Защо е избрана горната задача? Причините са две. Първата е, че задачата е съдържателна и дава възможност за обобщения, а втората е, че от научно-педагогическа гледна точка е подходяща за генериране чрез компютър на разнообразни ситуации и формулиране на хипотези, които след строго математическо доказателство се превръщат в теореми, т.е. в забележителни факти. В резултат на изследването се оказва, че споменатите три точки върху медианите на триъгълника притежават редица интересни свойства, които си заслужава да бъдат изложени и определят монографичния характер на настоящата книга. Целта на авторите е не само да фиксират фактите, но и да посочат пътя на достигането им, който от позицията на педагогиката на математиката е съществен при формирането на изследователски и откривателски умения.

В конкретния случай научното търсене беше съществено подпомогнато от възможността за разнообразно експериментиране с помощта на компютърните програми “The Geometer’s Sketchpad” и “Maple”. Тук трябва да се отбележи, че под ръководството на авторите ученикът Румен Данговски от IX клас на Националната природо-математическа гимназия (понастоящем десетокласник в Софийската математическа гимназия) осъществи експерименти върху задачата на Христо Лесов с използване предимно на компютърната програма “Geogebra”. Той получи самостоятелно част от резултатите в тази книга, както и няколко резултата за многоъгълници, които не са отбелязани тук. Румен Данговски взе участие в ежегодния конкурс по Международния проект **MITE** (**M**ethodology and **I**nformation **T**echnologies in **E**ducation), разработван през последните пет години от сътрудници на Института по математика и информатика при БАН, Академията за социално управление в Москва и Факултета по педагогическо образование към Московския държавен университет “М. В. Ломоносов”. Ученикът представи разработка “Анализ върху конфигурация от три забележителни точки в триъгълника”, с която спечели първите места на Националния кръг на конкурса в България и на Международния етап в Москва през 2011 г. Доказателствата на твърденията, които той получи, бяха осъществени с прилагане на комплексни числа.

В настоящата книга формулираните факти и свойства се доказват с помощта на барицентрични координати. Затова в първа глава са включени кратки сведения за барицентричните координати в равнината и някои техни приложения в качеството им на съответен математически апарат и техника. По-пълна информация по темата може да се намери в отбелязаната литература. Доказателствата на разгледаните твърдения могат да служат като упражнения върху използването на барицентрични координати за установяване например на колинеарност на три точки или конкурентност на три прави, както и при определянето на конични сечения. Първа глава има предварителен характер с представените в нея понятия и релации от геометрията на триъгълника. Тя изпълнява помощна функция при доказване на твърденията от основната част на книгата и означенията в нея се използват по-нататък в цялото изложение.

Втора и трета глави представляват съдържателната част на книгата. Във втора глава се показва как пораждащите се по естествен начин във върховете на даден триъгълник инволюции на спрегнати прави определят три специални точки. В трета глава се описват редица свойства на тези точки. Самите свойства са свързани с колинеарност на точки, конкурентност на прави и конични сечения. Включени са кратки доказателства на свойствата, както и редица уточнения към някои от тях, дължащи се предимно на резултатите в доказателствата.

Книгата представлява завършено научно-педагогическо изследване по темата, което, както беше отбелязано по-горе, определя монографичния ѝ характер. Основни нейни ползватели би следвало да бъдат студенти, в това число и бъдещи учители, които се интересуват от задълбочено познаване на геометрията на триъгълника и усвояване на апарата на барицентричните координати. Голямото количество твърдения, придружени с решения, превръща книгата в подходящо помагало за очертаната целева група. При друга конструкция твърденията и решенията биха могли да се оформят като сборник за подготовка и самоподготовка. Високата цел е свързана с възможността за формиране на научно-изследователски умения. При това бъдещите специалисти са задължени да отчитат развитието и усъвършенстването на съвременните ефективни информационни технологии. Предназначението на настоящата книга е и в тази посока. Ползватели биха могли да бъдат активни учители по математика и ръководители на извънкласни занимания, а също и изявени ученици. Не на последно място са и любителите на математиката. Книгата е разработена методически и достатъчно подробно, за да улеснява в максимална степен и тях.

Авторите

София, април 2012 г.

ГЛАВА I

ПРЕДВАРИТЕЛНИ СВЕДЕНИЯ

В тази глава накратко се описват някои геометрични факти, които се използват съществено в обосноваването на основните изследвания в следващите глави. Самите факти са свързани с основни равенства в барицентрични координати спрямо даден триъгълник, с характерни тъждества и неравенства в триъгълника и с едно специално проективно преобразуване в равнината.

§ 1. БАРИЦЕНТРИЧНИ КООРДИНАТИ

1. Барицентрични координати на точка спрямо триъгълник. Нека ABC е произволен триъгълник, а M е точка в равнината му. За произволна точка P в пространството съществува единствена наредена тройка реални числа (x_M, y_M, z_M) със свойствата $\overrightarrow{PM} = x_M \overrightarrow{PA} + y_M \overrightarrow{PB} + z_M \overrightarrow{PC}$ и $x_M + y_M + z_M = 1$. Числата x_M, y_M и z_M се наричат *барицентрични (триъгълни) координати на точката M спрямо* $\triangle ABC$, което означаваме така: $M(x_M, y_M, z_M)$. За координатите на върховете на $\triangle ABC$ имаме $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$.

Ще отбележим барицентричните координати на някои забележителни точки за $\triangle ABC$. Ако с M_a, M_b, M_c са означени средите съответно на отсечките BC, CA и AB, то $M_a\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $M_b\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ и $M_c\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$. За медицентъра G на $\triangle ABC$ е изпълнено $G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. По-нататък определяме дължините на страните на $\triangle ABC$ с равенствата $|BC| = a$, $|CA| = b$ и $|AB| = c$, а лицето на триъгълника означаваме с S. За координатите на ортоцентъра H и центъра O на описаната окръжност за $\triangle ABC$ са изпълнени следните формули:

$$x_H = \frac{\left(a^2 - b^2 + c^2\right)\left(a^2 + b^2 - c^2\right)}{16S^2},$$

$$(1) \qquad y_H = \frac{\left(a^2 + b^2 - c^2\right)\left(-a^2 + b^2 + c^2\right)}{16S^2},$$

$$z_H = \frac{\left(-a^2 + b^2 + c^2\right)\left(a^2 - b^2 + c^2\right)}{16S^2},$$

$$x_O = \frac{a^2\left(-a^2 + b^2 + c^2\right)}{16S^2},$$

$$(2) \qquad y_O = \frac{b^2\left(a^2 - b^2 + c^2\right)}{16S^2},$$

$$z_O = \frac{c^2\left(a^2 + b^2 - c^2\right)}{16S^2}.$$

Ако правите AA_1, BB_1 и CC_1 са симетрични съответно на медианите AM_a, BM_b и CM_c спрямо ъглополовящите при съответните върхове на $\triangle ABC$, то AA_1, BB_1 и CC_1 се пресичат в една точка L, която се нарича точка на Лемоан. Координатите на L се изразяват с равенствата

$$(3) \qquad x_L = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \; y_L = \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \; z_L = \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Сега ще отбележим как се характеризират безкрайните точки на равнината (ABC). Векторът $\overrightarrow{N} = x_N\overrightarrow{PA} + y_N\overrightarrow{PB} + z_N\overrightarrow{PC}$ е компланарен с равнината на $\triangle ABC$, точно когато $x_N + y_N + z_N = 0$. Всички прави в равнината на $\triangle ABC$, колинеарни с този вектор, определят едно направление, което наричаме *безкрайна точка* на равнината (ABC). Тази безкрайна точка по аналогия с точката M (която наричаме още крайна) означаваме с $\overrightarrow{N}(x_N, y_N, z_N)$ или $N(x_N, y_N, z_N)$, като $x_N + y_N + z_N = 0$. В този случай координатите x_N, y_N и z_N на безкрайната точка N не са еднозначно определени.

2. Уравнение на права. Нека l е произволна права в равнината на $\triangle ABC$. Ако $M(x_M, y_M, z_M)$ е произволна точка от l, а $\vec{n}(\alpha, \beta, \gamma)$ $(\alpha + \beta + \gamma = 0)$ е вектор, колинеарен с l, то за всяка точка