

# Съдържание

I.	Въведение в анализа.....	7
1.	Редица. Граница на редица.....	7
2.	Функция на една независима променлива. Обратни функции. Хиперболични функции.....	18
3.	Граница на функция. Непрекъснатост.....	27
4.	Производна и диференциал на функция на една променлива.....	36
5.	Производни и диференциали от по-висок ред. $n$ -ти производни.....	46
6.	Теорема на Рол, Лагранж и Коши.....	52
7.	Формули на Тейлорен и Маклорен.....	55
8.	Неопределени форми. Теорема на Лопитал.....	61
9.	Монотонност на функция. Екстремуми на функция.....	66
10.	Изпъкналост и вдлъбнатост на функция. Инфлексни точки.....	73
11.	Асимптоти.....	77
12.	Изследване на функция и построяване на графиката ѝ.....	80
II.	Неопределен интеграл.....	91
13.	Таблица на основните интегрални. Непосредствено интегриране.....	91
14.	Интегриране чрез внасяне под знака на диференциала.....	94
15.	Интегриране по части.....	99
16.	Интегриране чрез смяна на променливите.....	107
17.	Интегриране на дробно-рационални функции.....	109
18.	Интегриране на ирационални функции.....	118
19.	Интегрални от рационални функции на $\sin x$ и $\cos x$ . Други интегрални.....	125
III.	Определен интеграл. Приложения.....	131
20.	Връзка между определен и неопределен интеграл. Интегриране по части и чрез субституция при определен интеграл.....	131
21.	Лице на равнинна фигура.....	136
22.	Дължини на дъги от равнинни линии.....	142
23.	Обем на тяло.....	145
24.	Лице на ротационна повърхнина.....	151
25.	Други приложения на определен интеграл.....	154
IV.	Функции на две и повече независими променливи. Неявни функции.....	158

26.	Основни понятия за функция на две и повече независими променливи. Частни производни и диференциали на функции на две и повече променливи.....	158
27.	Съставни (сложни) функции .....	165
28.	Неявни функции. Производни на неявни функции.....	172
29.	Формула на Тейлор за функция на две променливи. Екстремуми на функции на две променливи – локални, условни екстремуми, най-голяма и най-малка стойност .....	175
V.	Несобствени интеграли. Интеграли, зависещи от параметър.....	185
30.	Несобствени интеграли .....	185
31.	Интеграли, зависещи от параметър .....	190
VI.	Редове.....	197
32.	Числови редове с неотрицателни членове. Критерии за сходимост на редове с положителни членове.....	197
33.	Алтернативни редове. Критерий на Лайбниц. Абсолютно и условно сходящи редове. Умножаване на редове .....	204
34.	Функционни редове. Диференциране и интегриране на функционни редове .....	209
35.	Степенни редове. Област на сходимост. Развиване на функция в степенен ред.....	216
36.	Редове на Фурие .....	224
VII.	Двойни и тройни интеграли. Приложения.....	240
37.	Двоен интеграл .....	240
38.	Троен интеграл .....	250
39.	Приложение на двойни интеграли за пресмятане на лица.....	259
40.	Приложение на двойни и тройни интеграли за пресмятане обеми на тела .....	269
41.	Други приложения на двойни и тройни интеграли.....	276
VIII.	Криволинейни и повърхнинни интеграли.....	286
42.	Криволинееен интеграл от I тип.....	286
43.	Криволинееен интеграл от II тип.....	291
44.	Приложение на криволинейни интеграли от I и II тип.....	298
45.	Повърхнинен (лицев) интеграл от I тип.....	305
46.	Повърхнинен (лицев) интеграл от II тип.....	312
47.	Приложение на повърхнинни интеграли от I и II тип.....	319

48. Елементи на скаларно и векторно поле.....	329
49. Формули на Грийн, Стокс, Гаус-Остроградски .....	334
Отговори, упътвания, решения.....	345
Използвана литература.....	366



---

# I. ВЪВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗА

---

## 1. Редица. Граница на редица

Ако на естествените числа  $1, 2, 3, \dots, n, \dots$  по някакво правило се съпоставя по едно число  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ , казва се, че е дефинирана *числова редица*  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ . Редицата се бележи с  $\{a_n\}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , а  $a_n$  се нарича *общ член* ( $n$ -ти член) *на редицата*. Обикновено  $a_n$  показва правилото, по което от естественото число  $n$  се получава  $n$ -тият член на числовата редица. При дефинирането на една редица може на две различни естествени числа да се съпостави едно и също число, например редицата  $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$ , при която на всички нечетни естествени числа съответства числото  $1$ , а на всички четни – числото  $-1$ .

Обикновено една редица се задава, като се даде конкретен израз за  $a_n$ .

Примери:  $a_n = (-1)^{n+1}$ ,  $a_n = \frac{1}{n^2}$ ,  $a_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{n}$ ,  $\dots$

Друг начин на задаване на редица е, като се даде връзка (наречена рекурентна) между няколко последователни члена на редицата. Пример е редицата на Фибоначи, чиито първи два члена са единици, а останалите се получават от връзката  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ .

Правилото, по което се получават членовете на една редица, може да се изкаже и словесно:

Редица, за която е изпълнено  $a_n \leq a_{n+1}$  ( $a_n \geq a_{n+1}$ ), се нарича *монотонно растяща* (*монотонно намаляваща*). Ако е изпълнено  $a_n < a_{n+1}$  ( $a_n > a_{n+1}$ ), редицата е само *растяща* (*намаляваща*).

Съвкупността от всички реални числа (точки), заключени между две дадени числа (точки)  $a$  и  $b$ , се нарича *интервал*. Дадените числа се наричат *границы на интервала*. Ако към интервала принадлежат и граничните точки  $a$  и  $b$ , то той се нарича *затворен интервал* и се бележи  $[a; b]$  или  $a \leq x \leq b$ . Ако към него не принадлежат граничните точки  $a$  и  $b$ , то той се нарича *отворен интервал* и се бележи  $(a; b)$  или  $a < x < b$ . Всеки отворен интервал, който съдържа точка (числото)  $c$ , т.е.  $a < c < b$ , се нарича *околност на точката c*.

Ако всички членове на една редица остават по-малки или най-много равни на едно число, се казва, че редицата е *ограничена отгоре*. Най-малкото число  $L$ , което изпълнява това условие, т.е.  $a_n \leq L$  за всяко  $n$ , се нарича *точна горна граница*. Ако всички членове на една редица остават по-големи или най-малко равни на едно крайно число, то се казва, че редицата е *ограничена отдолу*. Най-голямото число  $l$ , за което  $a_n \geq l$  за всяко  $n$ , се нарича *точна долна граница*. Една редица се нарича *ограничена*, когато има долна и горна граница. Една точка  $\xi$  се нарича *точка на съгъстяване* на дадена числова редица, ако всяка околност на  $\xi$  съдържа безброй много членове на тази редица.

**Теорема на Болцано-Вайерщрас:** Всяка ограничена редица притежава поне една точка на съгъстяване.

Ако една числова редица е ограничена и притежава само една точка на съгъстяване, тя се нарича *сходяща*. Единствената точка на съгъстяване на една сходяща редица се нарича *граница на редицата*. Често вместо “ $A$  е граница на редицата” се казва, че “редицата

клони към  $A$ ". Една сходяща редица може да клони към своята граница по различен начин (като расте, като намалява, като се колебае и т.н.). Съществено е обаче, че при достатъчно големи значения на  $n$  членовете  $a_n$  са много близки до своята граница  $A$ .

**Дефиниция:** Казва се, че числото  $a$  е граница на редицата  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ , ако за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува такова число  $N = N(\varepsilon)$  (евентуално зависещо от  $\varepsilon$ ), че при  $n > N(\varepsilon)$  е изпълнено неравенството  $|a_n - a| < \varepsilon$ . При това редицата се нарича *сходяща*.

**Критерий на Коши:** Необходимо и достатъчно условие редицата  $\{a_n\}, n = 1, 2, \dots$ , да е сходяща е на всеки избор на числото  $\varepsilon > 0$  да съответства друго число  $N(\varepsilon)$ , така че при  $n > N(\varepsilon)$  и при всяко цяло положително  $p$  да е изпълнено  $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$ .

Ако редицата  $\{a_n\}, n = 1, 2, \dots$ , е сходяща и има граница  $a$ , означаваме с  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  или  $a_n \rightarrow a$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Редицата  $\{a_n\}, n = 1, 2, \dots$ , се нарича *безкрайно малка*, ако  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Редицата  $\{a_n\}, n = 1, 2, \dots$ , се нарича *безкрайно голяма* (сходяща към безкрайност), ако за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува такова число  $N = N(\varepsilon)$ , че при  $n > N(\varepsilon)$  е изпълнено неравенството  $|a_n| > \varepsilon$ . Ако при това, започвайки от някой номер нататък, всички членове на редицата са положителни (отрицателни), означаваме  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  ( $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ ).

Сходящите редици имат следните свойства:

1. Ако  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$ .

2. Ако  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$ .

3. Ако  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , като  $b_n \neq 0$  и  $b \neq 0$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ .

4. Всяка безкрайна подредица на една сходяща редица е сходяща редица със същата граница.

5. Ако  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  и за безброй много стойности на  $n$  е изпълнено  $a_n \leq b_n$ , то и  $a \leq b$ .

6. Ако  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$  и членовете на редицата  $\{c_n\}, n = 1, 2, \dots$ , удовлетворяват неравенствата  $a_n \leq c_n \leq b_n$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ .

При намиране граници на редици често се използват следните по-специални граници:

I.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$  при  $|a| < 1$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$  при  $|a| > 1$ .

II.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

III.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,7182\dots$  ( $e$  – Неперово число).

IV.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ .

**ПРИМЕР 1** Да се провери монотонна ли е редицата с общ член  $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ .

**Решение:** За да проверим дали редицата е монотонна, образуваме разликата

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{(n+1)^2}{(n+1)+1} - \frac{n^2}{n+1} = \frac{(n+1)^2}{n+2} - \frac{n^2}{n+1} = \frac{(n+1)^2(n+1) - n^2(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 - 2n^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + 3n + 1}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

Последната дроб е по-голяма от 0 за всяко естествено число  $n$ . Следователно  $a_{n+1} - a_n > 0$  или  $a_n < a_{n+1}$ , което означава, че редицата е монотонно растяща.

**ПРИМЕР 2** Да се докаже, че редицата с общ член  $a_n = \frac{n+1}{n}$  е ограничена отдолу и отгоре.

**Решение:** Тъй като  $n+1 > n$  за всяко естествено  $n$ , то  $a_n = \frac{n+1}{n} > 1$ , т.е. редицата е ограничена отдолу. От друга страна, можем да запишем, че

$$a_n = \frac{n+1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \leq 1 + 1 = 2,$$

тъй като  $\frac{1}{n} \leq 1$  за всяко естествено  $n$ . Следователно редицата е ограничена и отгоре.

**ПРИМЕР 3** Да се докаже, че редицата с общ член  $a_n = \frac{5n}{n+1}$  има за граница числото 5.

**Решение:** Съгласно втората дефиниция за граница числото 5 ще е граница, ако за всяко  $\varepsilon > 0$  може да се намери такова число  $N$ , че за всички членове на редицата с номер  $n > N$  да бъде изпълнено неравенството

$$\left| \frac{5n}{n+1} - 5 \right| < \varepsilon \quad \text{или} \quad \frac{5}{n+1} < \varepsilon.$$

Като решим последното неравенство относно  $n$ , получаваме  $n > \frac{5}{\varepsilon} - 1$ .

Нека  $\varepsilon > 0$  и  $N$  е произволно естествено число, не по-малко от  $\frac{5}{\varepsilon} - 1$ . При всяко  $n > N$  ще бъде изпълнено неравенството  $\left| \frac{5n}{n+1} - 5 \right| < \varepsilon$  и от дефиницията за граница следва, че  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{n+1} = 5$ .

Нека  $\varepsilon = 0,01$ . Тогава  $\frac{5}{0,01} - 1 = 500 - 1 = 499$ , което означава, че за произволен член от редицата с номер, по-голям от 499, имаме  $|a_n - 5| < 0,01$ . Вземаме  $n = 500$ . Тогава имаме  $a_{500} = \frac{5 \cdot 500}{500+1} = \frac{2500}{501}$ . Намираме  $|a_{500} - 5| = \left| \frac{2500}{501} - 5 \right| = \left| -\frac{5}{501} \right| = \frac{5}{501} \approx 0,00998 < 0,01$ , т.е.  $|a_{500} - 5| < \varepsilon = 0,01$ . По такъв начин всички членове на редицата след 499-ия (без него) ще се намират в  $\varepsilon$ -околността на 5, т.е. в интервала  $(4,99; 5,01)$ .

Аналогично, при друго зададено  $\varepsilon > 0$  може да се намери  $N$ , така че, започвайки от член на редицата с този номер, всички следващи членове да се намират в  $\varepsilon$ -околността на числото 5.

Покажете, че ако  $\varepsilon = 0,001$ , всички членове на редицата, започвайки от 5000-ия нагоре, ще се намират в интервала  $(4,999; 5,001)$ .