Съдържание

I. ВЪВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗА

1. Редица. Граница на редица

Ако на естествените числа 1, 2, 3, ..., n, ... по някакво правило се съпоставя по едно число $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$, казва се, че е дефинирана *числова редица* $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$. Редицата се бележи с $\{a_n\}$, $n = 1, 2, 3, ...$, а a_n се нарича *общ член* (n-ти член) *на редицата*. Обикновено a_n показва правилото, по което от естественото число n се получава n-тият член на числовата редица. При дефинирането на една редица може на две различни естествени числа да се съпостави едно и също число, например редицата 1, –1, 1, –1, 1, –1, ..., при която на всички нечетни естествени числа съответства числото 1, а на всички четни – числото –1.

Обикновено една редица се задава, като се даде конкретен израз за a_n.

Примери: $a_n = (-1)^{n+1}$, $a_n = \dfrac{1}{n^2}$, $a_n = 1 + (-1)^n \dfrac{1}{n}$, ...

Друг начин на задаване на редица е, като се даде връзка (наречена рекурентна) между няколко последователни члена на редицата. Пример е редицата на Фибоначи, чиито първи два члена са единици, а останалите се получават от връзката $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Правилото, по което се получават членовете на една редица, може да се изкаже и словесно:

Редица, за която е изпълнено $a_n \le a_{n+1}$ ($a_n \ge a_{n+1}$), се нарича *монотонно растяща* (*монотонно намаляваща*). Ако е изпълнено $a_n < a_{n+1}$ ($a_n > a_{n+1}$), редицата е само *растяща* (*намаляваща*).

Съвкупността от всички реални числа (точки), заключени между две дадени числа (точки) a и b, се нарича *интервал*. Дадените числа се наричат *граници на интервала*. Ако към интервала принадлежат и граничните точки a и b, то той се нарича *затворен* интервал и се бележи $[a; b]$ или $a \le x \le b$. Ако към него не принадлежат граничните точки a и b, то той се нарича *отворен* интервал и се бележи $(a; b)$ или $a < x < b$. Всеки отворен интервал, който съдържа точка (числото) c, т.е. $a < c < b$, се нарича *околност на точката* c.

Ако всички членове на една редица остават по-малки или най-много равни на едно число, се казва, че редицата е *ограничена отгоре*. Най-малкото число L, което изпълнява това условие, т.е. $a_n \le L$ за всяко n, се нарича *точна горна граница*. Ако всички членове на една редица остават по-големи или най-малко равни на едно крайно число, то се казва, че редицата е *ограничена отдолу*. Най-голямото число l, за което $a_n \ge l$ за всяко n, се нарича *точна долна граница*. Една редица се нарича *ограничена*, когато има долна и горна граница. Една точка ξ се нарича *точка на сгъстяване* на дадена числова редица, ако всяка околност на ξ съдържа безброй много членове на тази редица.

***Теорема на Болцано-Вайерщрас*:** Всяка ограничена редица притежава поне една точка на сгъстяване.

Ако една числова редица е ограничена и притежава само една точка на сгъстяване, тя се нарича *сходяща*. Единствената точка на сгъстяване на една сходяща редица се нарича *граница* на редицата. Често вместо “A е граница на редицата ” се казва, че “редицата клони към A". Една сходяща редица може да клони към своята граница по различен начин (като расте, като намалява, като се колебае и т.н.). Съществено е обаче, че при достатъчно големи значения на n членовете a_n са много близки до своята граница A.

***Дефиниция*:** Казва се, че числото a е *граница* на редицата $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова число $N = N(\varepsilon)$ (евентуално зависещо от ε), че при $n > N(\varepsilon)$ е изпълнено неравенството $|a_n - a| < \varepsilon$. При това редицата се нарича *сходяща*.

Критерий на Коши: Необходимо и достатъчно условие редицата $\{a_n\}$, $n = 1, 2, ...$, да е сходяща е на всеки избор на числото $\varepsilon > 0$ да съответства друго число $N(\varepsilon)$, така че при $n > N(\varepsilon)$ и при всяко цяло положително p да е изпълнено $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$.

Ако редицата $\{a_n\}$, $n = 1, 2, ...$, е сходяща и има граница a, означаваме с $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ или $a_n \to a$ при $n \to \infty$.

Редицата $\{a_n\}$, $n = 1, 2, ...$, се нарича *безкрайно малка*, ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Редицата $\{a_n\}$, $n = 1, 2, ...$, се нарича *безкрайно голяма* (сходяща към безкрайност), ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова число $N = N(\varepsilon)$, че при $n > N(\varepsilon)$ е изпълнено неравенството $|a_n| > \varepsilon$. Ако при това, започвайки от някой номер нататък, всички членове на редицата са положителни (отрицателни), означаваме $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty\right)$.

Сходящите редици имат следните свойства:

1. Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n \pm b_n\right) = a \pm b$.

2. Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n . b_n\right) = a . b$.

3. Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, като $b_n \neq 0$ и $b \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

4. Всяка безкрайна подредица на една сходяща редица е сходяща редица със същата граница.

5. Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ и за безброй много стойности на n е изпълнено $a_n \le b_n$, то и $a \le b$.

6. Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$ и членовете на редицата $\{c_n\}$, $n = 1, 2, ...$, удовлетворяват неравенствата $a_n \le c_n \le b_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

При намиране граници на редици често се използват следните по-специални граници:

I. $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ при $|a| < 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$ при $|a| > 1$.

II. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

III. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}7182...$ (e – Неперово число).

IV. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

ПРИМЕР 1 Да се провери монотонна ли е редицата с общ член $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}$.

Решение: За да проверим дали редицата е монотонна, образуваме разликата

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)^2}{(n+1)+1} - \frac{n^2}{n+1} = \frac{(n+1)^2}{n+2} - \frac{n^2}{n+1} = \frac{(n+1)^2(n+1) - n^2(n+2)}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 - 2n^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + 3n + 1}{(n+1)(n+2)}.$$

Последната дроб е по-голяма от 0 за всяко естествено число n. Следователно $a_{n+1} - a_n > 0$ или $a_n < a_{n+1}$, което означава, че редицата е монотонно растяща.

ПРИМЕР 2 Да се докаже, че редицата с общ член $a_n = \dfrac{n+1}{n}$ е ограничена отдолу и отгоре.

Решение: Тъй като $n + 1 > n$ за всяко естествено n, то $a_n = \dfrac{n+1}{n} > 1$, т.е. редицата е ограничена отдолу. От друга страна, можем да запишем, че

$$a_n = \frac{n+1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \leq 1 + 1 = 2,$$

тъй като $\dfrac{1}{n} \leq 1$ за всяко естествено n. Следователно редицата е ограничена и отгоре.

ПРИМЕР 3 Да се докаже, че редицата с общ член $a_n = \dfrac{5n}{n+1}$ има за граница числото 5.

Решение: Съгласно втората дефиниция за граница числото 5 ще е граница, ако за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери такова число N, че за всички членове на редицата с номер $n > N$ да бъде изпълнено неравенството

$$\left| \frac{5n}{n+1} - 5 \right| < \varepsilon \quad \text{или} \quad \frac{5}{n+1} < \varepsilon.$$

Като решим последното неравенство относно n, получаваме $n > \dfrac{5}{\varepsilon} - 1$.

Нека $\varepsilon > 0$ и N е произволно естествено число, не по-малко от $\dfrac{5}{\varepsilon} - 1$. При всяко $n > N$ ще бъде изпълнено неравенството $\left| \dfrac{5n}{n+1} - 5 \right| < \varepsilon$ и от дефиницията за граница следва, че $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n}{n+1} = 5$.

Нека $\varepsilon = 0{,}01$. Тогава $\dfrac{5}{0{,}01} - 1 = 500 - 1 = 499$, което означава, че за произволен член от редицата с номер, по-голям от 499, имаме $|a_n - 5| < 0{,}01$. Вземаме $n = 500$. Тогава имаме $a_{500} = \dfrac{5.500}{500+1} = \dfrac{2500}{501}$. Намираме $|a_{500} - 5| = \left| \dfrac{2500}{501} - 5 \right| = \left| -\dfrac{5}{501} \right| = \dfrac{5}{501} \approx 0{,}00998 < 0{,}01$, т.е. $|a_{500} - 5| < \varepsilon = 0{,}01$. По такъв начин всички членове на редицата след 499-ия (без него) ще се намират в ε-околността на 5, т.е. в интервала (4,99; 5,01).

Аналогично, при друго зададено $\varepsilon > 0$ може да се намери N, така че, започвайки от член на редицата с този номер, всички следващи членове да се намират в ε-околността на числото 5.

Покажете, че ако $\varepsilon = 0{,}001$, всички членове на редицата, започвайки от 5000-я нагоре, ще се намират в интервала (4,999; 5,001).