С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

ГЛАВА I

ПРЕДВАРИТЕЛНИ СВЕДЕНИЯ

В тази глава накратко се описват някои геометрични факти, които се използват съществено в обосноваването на основните изследвания в следващите глави. Самите факти са свързани с основни елементи и свойства, характерни за кривите от втора степен и с равенства в барицентрични координати спрямо триъгълник и тетраедър. Отбелязани са някои забележителни свойства на тетраедъра и съответните им аналози при вписания четириъгълник. Съдържат се и елементи от геометрията на комплексните числа.

§ 1. ОСНОВНИ СВОЙСТВА НА КРИВИТЕ ОТ ВТОРА СТЕПЕН

1. Метрична класификация на кривите. Множеството на точките $M \; x, y$ в равнината, координатите на които спрямо Декартова координатна система Oxy удовлетворяват общо уравнение от вида:

1.1 $$k : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \, ,$$

където $a_{ij} = a_{ji} \;\; 1 \le i, j \le 3$ са реални числа, се нарича *крива* k *от втора степен.*

С подходяща ортогонална трансформация координатната система Oxy може да се приведе в Декартова координатна система $\bar{O}XY$, спрямо която k има *най-просто уравнение*. Това най-просто уравнение може да се представи в един от следните три вида:

1.2 $$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0 \, ,$$

1.3 $$I_1 Y^2 \pm 2\sqrt{-\frac{I_3}{I_1}} X = 0 \, ,$$

1.4 $$I_1 X^2 + \frac{I_4}{I_1} = 0,$$

където $I_1 = a_{11} + a_{22}$, $I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,

$I_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, а λ_1 и λ_2 са корените на *характеристичното уравнение* $\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0$. Величините I_1, I_2, I_3 и I_4 се наричат *ортогонални инварианти* на кривата.

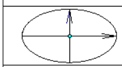
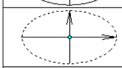
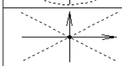
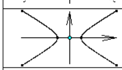
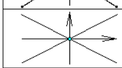
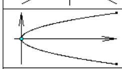
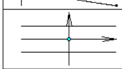
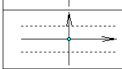
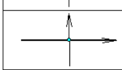
КЛАСИФИКАЦИЯ НА КРИВИТЕ ОТ ВТОРА СТЕПЕН				
КРИВА	КАНОНИЧНО УРАВНЕНИЕ	НАИМЕНОВАНИЕ	ИНВАРИАНТЕН ПРИЗНАК	ГРУПА
	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$	ЕЛИПСА	$I_2 > 0 \quad I_1 I_3 < 0$	I
	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1$	ИМАГИНЕРНА ЕЛИПСА	$I_2 > 0 \quad I_1 I_3 > 0$	
	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0$	ДВЕ КОМПЛЕКСНО СПРЕГНАТИ ПРЕСИЧАЩИ СЕ ПРАВИ	$I_2 > 0 \quad I_3 = 0$	
	$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$	ХИПЕРБОЛА	$I_2 < 0 \quad I_3 \neq 0$	
	$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0$	ДВЕ РЕАЛНИ ПРЕСИЧАЩИ СЕ ПРАВИ	$I_2 < 0 \quad I_3 = 0$	
	$Y^2 = 2pX$	ПАРАБОЛА	$I_2 = 0 \quad I_3 \neq 0$	II
	$Y^2 - a^2 = 0$	ДВЕ РЕАЛНИ УСПОРЕДНИ ПРАВИ	$I_2 = 0 \quad I_3 = 0 \quad I_4 < 0$	III
	$Y^2 + a^2 = 0$	ДВЕ КОМПЛЕКСНО СПРЕГНАТИ УСПОРЕДНИ ПРАВИ	$I_2 = 0 \quad I_3 = 0 \quad I_4 > 0$	
	$Y^2 = 0$	ДВОЙНА ПРАВА	$I_2 = 0 \quad I_3 = 0 \quad I_4 = 0$	

Таблица 1

Уравненията 1.2 , 1.3 и 1.4 определят съответно първа (I), втора (II) и трета (III) група криви от втора степен. Наименованията на кривите, принадлежащи към съответните групи, са описани в третия стълб на таблица 1. Величините I_1, I_2 и I_3 са инварианти за всички групи криви, а I_4 е инварианта, характерна за кривите от група III. От най-простите уравнения (1.2), (1.3) и (1.4) се получават *каноничните уравнения* на всичките девет вида криви от втора степен, представени във втория стълб на таблица 1. Видът на една крива от втора степен може да се определи от общото уравнение (1.1) без да се преминава към нова координатна система, като се използват *инвариантните признаци*, представени в четвъртия стълб на таблица 1.

Кривите елипса, имагинерна елипса, парабола и хипербола се наричат *неизродени криви,* а останалите криви от втора степен, описани в таблица 1, – *изродени криви*. Изродената крива «две пресичащи се комплексно спрегнати прави» има само една реална точка – точката $\bar{O}$ спрямо $\bar{O}XY$. По аналогия с тази крива можем да смятаме, че и изродената крива «две успоредни комплексно спрегнати прави» има една реална "особена" точка, която е безкрайната точка, определена от направлението на правата $\bar{O}X$, както е според уравнението в осмия ред на таблица 1. Освен това, от проективна гледна точка тези две криви са неразличими. Така от всички девет криви от втора степен (таблица 1) само кривата «имагинерна елипса» не притежава нито една реална точка.

2. Център на крива. Точка $S(x_0, y_0)$, координатите на която удовлетворяват системата уравнения:

$$(1.5)\qquad \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0, \end{cases}$$

се нарича *център* на кривата k, определена с (1).

Крива k, която притежава точно един център, се нарича *централна,* а в противен случай (когато има повече от един център или не притежава център) – *нецентрална*. Кривата k е централна точно когато $I_2 \neq 0$. Нецентралната крива k има центрове, когато са изпълнени условията $I_2 = 0$ и $I_3 \neq 0$. Множеството от центровете на нецентрална крива е права. Кривите от група I са централни, кривата в група II няма център, а кривите от група III са нецентрални и имат центрове, разположени върху една права.