Георги Паскалев
Пламен Паскалев
Христина Димитрова
Капка Димитрова

Общ преговор

от средното училище с
313 решени задачи и
326 задачи за самостоятелна работа
Подготовка за ДЗИ с 28 теста и
224 задачи + отговори,
решения и упътвания

АрхИМеД

ISBN 978-954-779-142-8

ПРЕДГОВОР

Настоящото учебно помагало е разработено по учебно-изпитната програма за Държавни зрелостни изпити (ДЗИ) по математика, изготвена от МОМН.

Първата част се състои от задачи по:

- алгебра и анализ в 9 параграфа с 32 теми;
- комбинаторика, теория на вероятностите и статистика в 3 параграфа със 7 теми;
- геометрия в 7 параграфа с 23 теми.

Всяка тема съдържа решени задачи и задачи за самостоятелна работа, съобразени с действащите учебници, както и минимум теория. Някои общоизвестни формули и теоретични постановки, непубликувани в това издание, могат да се намерят в учебниците на издателство "Архимед", както и в справочниците по математика.

Задачите са подбрани с широк спектър на трудност – от задачи за непосредствено приложение на знанията до нетрадиционни задачи, чиито решения изискват съобразителност, находчивост и досетливост.

Решените примери илюстрират основните методи за решаване и разкриват свойствата на разглежданите обекти. Най-успешният преговор на теорията се осъществява чрез наблюдение и регистриране на приложенията и при решаване на конкретни задачи. Най-успешното усвояване на методи за решаване на задачи става чрез сравняване и разискване на различните методи при решаване на задачи от един и същи вид. В този смисъл тази книга е не само общ преговор на теорията, но и методическо ръководство за решаване на задачи.

Задачите за самостоятелна работа са придружени с упътвания и отговори.

В последно време се проявява и осъществява тенденцията за отпадане на темите за вектори от учебните програми. В програмата на МОМН за ДЗИ не е споменато понятието "вектор" и в настоящото издание не е разработена тази тематика. Това не означава, че авторите приемат споменатата тенденция. Векторният метод е универсален – той може да се прилага за решаване на почти всяка геометрична задача, независимо от това дали тя е равнинна или пространствена. При този метод се работи стандартно, даже без фигури, без геометрични представи, без особена нужда от пространствено въображение. Той е изключително сигурен, но поради сравнително трудното придобиване на умения за работа с вектори няма особена популярност.

Втората част съдържа 10 примерни теста, които са съобразени с учебно-изпитната програма за ДЗИ.

Последната трета част обхваща 18 теми от ДЗИ, давани през периода 2008 – 2012 г. Освен отговорите на задачите, са посочени критериите за оценяване на някои от тях.

Ще бъдем особено признателни за всички бележки и препоръки, които ще вземем под внимание при следващо издание. Те могат да бъдат изпратени на e-mail: beerpal@mail.bg.

Помагалото може да се използва:

- от ученици в горните класове, учители, преподаватели в курсове и учебни центрове;
- за преговор, подготовка за матура, самостоятелна работа, работа в клас, извънкласна работа и подготовка за кандидатстване във висши училища.

СЪДЪРЖАНИЕ

ПЪРВА ЧАСТ

ОБЩ ПРЕГОВОР

АЛГЕБРА И АНАЛИЗ

§ 1. ЧИСЛА

Има различни методи за въвеждане на понятието “реално число”. Като главни се открояват два – конструктивен и аксиоматичен.

При **конструктивния метод** най-напред се въвежда множеството на естествените числа, като се използва аксиоматиката на Пеано, която се състои само от 5 аксиоми. След това всъщност се повтаря пътят, по който исторически се е достигнало до реалните числа – последователно разширение на множеството на естествените числа. При това конструкциите в отделните етапи изискват много време. Последният етап – построяването на реалните числа, като се изхожда от множеството на рационалните числа, може да се извърши по различни начини (Дедекинд, Кантор, Вайерщрас). Но всички тези конструкции са твърде сложни, за да бъдат изучавани в средното училище.

При **аксиоматичния метод** реалните числа се въвеждат за по-малко време, тъй като основните им свойства се дават във вид на аксиоми.

Едно множество R се нарича множество на реалните числа, а елементите му – реални числа, ако за тях са определени две операции – събиране и умножение, и една релация за наредба, за които са изпълнени следните аксиоми:

Аксиоми за събирането:

1. $a + b = b + a$
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. Съществува елемент 0, за който $a + 0 = 0$ за всяко a.
4. За всяко a съществува елемент $-a$, за който $a + (-a) = 0$.

Аксиоми за умножението:

5. $a \,.\, b = b \,.\, a$
6. $(a \,.\, b) \,.\, c = a \,.\, (b \,.\, c)$
7. $(a + b) \,.\, c = a \,.\, c + b \,.\, c$
8. Съществува елемент $1 \neq 0$, за който $a \,.\, 1 = a$ за всяко a.
9. За всяко $a \neq 0$ съществува елемент a^{-1}, за който $a \,.\, a^{-1} = 1$.

Аксиоми за наредбата:

10. За всеки два елемента a и b е изпълнена точно една от релациите
    $a < b$, $b < a$, $a + b$.
11. Ако $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.
12. Ако $a < b$, то $a + c < b + c$ за всяко c.
13. Ако $a > 0$ и $b > 0$, то $a \,.\, b > 0$.

Аксиома за непрекъснатостта:

14. Всяко непразно подмножество на R, което е ограничено отгоре, притежава точна горна граница.

В тази аксиоматика на реалните числа важна роля играе последната аксиома, известна като принцип за непрекъснатост. Множеството на рационалните числа удовлетворява всички аксиоми без последната. Принципът на непрекъснатост е главното предимство на реалните числа пред рационалните. Всички останали свойства, които отличават реалните числа от рационалните, следват от него.

Всяко рационално число може да се представи във вида $\frac{p}{q}$, където q е естествено число, а p – цяло число (положително, отрицателно или нула). Ако едно реално число не е рационално, то е ирационално.

Всяко реално число се представя с безкрайна десетична дроб, като:

- ако то е рационално, дробта е периодична;
- ако числото е ирационално, дробта е непериодична.

Превръщането на една безкрайна десетична периодична дроб в обикновена става по следните правила:

- ако периодът започва непосредствено след десетичната запетая,

$$a,(a_1\ a_2\ \dots\ a_n) = a + \frac{a_1\ a_2\ \dots\ a_n}{\underbrace{9\ 9\ \dots\ 9}_{n\text{ деветки}}},\ \text{например}\ 3,(45) = 3 + \frac{45}{99} = 3\frac{5}{11} = \frac{38}{11};$$

- ако периодът не започва непосредствено след десетичната запетая,

$$a,a_1a_2\dots a_m(b_1b_2\dots b_n) = a + \frac{a_1a_2\dots a_mb_1b_2\dots b_n - a_1a_2\dots a_m}{\underbrace{9\ 9\ \dots\ 9}_{n\text{ деветки}}\ \underbrace{0\ 0\ \dots\ 0}_{m\text{ нули}}},\ \text{например}$$

$$2,374(52) = 2 + \frac{37\,452 - 374}{99\,000} = \frac{117\ 539}{49\,500}.$$

Крайните десетични дроби, т.е. безкрайните десетични дроби с период 0, могат да се представят и като безкрайни периодични десетични дроби с период 9, например

$3 = 3,(0) = 2,(9)$, защото $2,(9) = 2 + \frac{9}{9} = 2 + 1 = 3$,

$2,46 = 2,46(0) = 2,45(9)$, защото $2,45(9) = 2 + \frac{459 - 45}{900} = 2,46$.

Записи от вида 2,(9) и 2,45(9) (съответно на числата 3 и 2,46) не се използват.

§ 2. ДРОБНО-РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

1. Тъждествени преобразувания на рационални изрази

Основните тъждества, които се използват при преобразуването на рационални изрази, са:

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$

2. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b),$

3. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b),$

4. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca),$

5. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$

6. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$

7. $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}),\ n = 2, 3, 4 \dots$

8. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),$

9. $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots - ab^{2n-1} + b^{2n}),\ n = 1, 2, 3, \dots$

Задача 1 Разложете на множители изразите:

а) $A = ab^2 + bc^2 + ca^2 - ac^2 - ba^2 - cb^2$;

б) $B = a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3$;

в) $C(x) = x^3 + 9x^2 + 11x - 21$;

г) $D = a^6 + b^6$.

Решение:

а) Подреждаме A по степените на c: $A = (b-a)c^2 + (a^2 - b^2)c + ab(b-a)$.

Като използваме (5), получаваме $A = (a-b)[-c^2 + (a+b)c - ab]$.

Подреждаме израза в средните скоби по степените на b: $A = (a-b)[(c-a)b + c(a-c)]$.

Окончателно получаваме $A = (a-b)(b-c)(c-a)$.

б) Преобразуваме както в точка а):

$$B = c^3(b-a) + c(a^3 - b^3) + ab(b^2 - a^2) = (a-b)[-c^3 + c(a^2 + ab + b^2) - ab(a+b)] =$$
$$= (a-b)[b^2(c-a) + b(ac - a^2) + c(a^2 - c^2)] = (a-b)(c-a)[b^2 + ab - c(c+a)] =$$
$$= (a-b)(c-a)[a(b-c) + b^2 - c^2] = (a-b)(c-a)(b-c)(a+b+c).$$

в) Тъй като $C(1) = 0$, то C се дели на $x - 1$. Тогава

$$C = x^3 + 9x^2 + 11x - 21 = x^3 - x^2 + 10x^2 - 10x + 21x - 21 =$$
$$= x^2(x-1) + 10x(x-1) + 21(x-1) = (x-1)(x^2 + 10x + 21) =$$
$$= (x-1)(x+3)(x+7).$$

г) $$D = a^6 + b^6 = (a^2)^3 + (b^2)^3 = (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4) =$$
$$= (a^2 + b^2)(a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 3a^2b^2) = (a^2 + b^2)\left[(a^2 + b^2)^2 - \left(\sqrt{3}ab\right)^2\right] =$$
$$= (a^2 + b^2)\left(a^2 + \sqrt{3}ab + b^2\right)\left(a^2 - \sqrt{3}ab + b^2\right).$$

Задача 2 Опростете дробните изрази:

а) $$A = \frac{\left(\frac{a}{b} + 1\right)^2 \left(\frac{a^3}{b^3} - 1\right)}{\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{b} + 1\right)} : \frac{\frac{a^3}{b^3} + 1}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 1};$$

б) $$B = \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)};$$

в) $$C(x) = \frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

Решение:

а) След привеждане към общ знаменател в отделните множители и съкращаване получаваме

$$A = \frac{(a+b)^2(a^3 - b^3)}{(a^2 - b^2)(a^2 + ab + b^2)} \cdot \frac{a^2 - ab + b^2}{a^3 + b^3}.$$

Оттук, като използваме (5), (6) и (8), намираме

$$A = \frac{(a+b)^2(a-b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)}{(a-b)(a+b)(a^2 + ab + b^2)(a+b)(a^2 - ab + b^2)} = 1.$$

б) $$B = \frac{a^3(c-b) + b^3(a-c) + c^3(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{c^3(b-a) + c(a^3 - b^3) + ab(b^2 - a^2)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$