

СЪДЪРЖАНИЕ

Теми	
Областен кръг 2008 г.	5
Национален кръг 2008 г.	11
Областен кръг 2009 г.	13
Национален кръг 2009 г.	18
Областен кръг 2010 г.	20
Национален кръг 2010 г.	26
Областен кръг 2011 г.	28
Национален кръг 2011 г.	34
Областен кръг 2012 г.	36
Национален кръг 2012 г.	42
Областен кръг 2013 г.	44
Национален кръг 2013 г.	50
Областен кръг 2014 г.	52
Национален кръг 2014 г.	58
Допълнителни материали	
Отново за телескопичните суми	60
Математически билиярди и динамични системи	70
Изопериметрични задачи и връзката им с вариационното смятане	75
Сравнения в помощ на диофантовите уравнения	82
Решения и отговори	87

Областен кръг на “Европейско Кенгуру”

22 март 2008 г.

След всяка задача има посочени 5 отговора, от които само един е верен. За даден верен отговор се присъждат 5 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици.

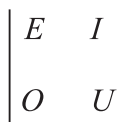
ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. В пет кутии с номера от 1 до 5 са поставени по няколко карти, които са маркирани с буквите A, E, I, O и U , както е показано. Петър маха карти от кутиите така, че в крайна сметка във всяка кутия остава по една карта и различните кутии съдържат различни карти. Коя е картата в кутия 2?



1

A) A



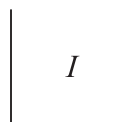
2

B) E



3

C) I



4

D) O



5

E) U

2. Борис и Сашо се състезават на 200 m бягане. Борис изминава разстоянието за $\frac{1}{2}$ min, а Сашо успява да го стори за $\frac{1}{100}$ от 1 h. Кой от двамата е по-бърз и с колко секунди?

A) Борис – с 36 s

B) Сашо – с 24 s

C) Борис – с 6 s

D) Сашо – с 4 s

E) двамата изминават разстоянието за еднакво време

3. Иво облякъл новата си коледна фланелка, на която била изобразена идващата Нова година.

2008

Заставайки пред голямото огледало вкъщи, той направил стойка на ръце с краката нагоре и надписът на фланелката се отразил в огледалото. Какво е видял братът му Косьо в огледалото, ако е в нормално положение (стъпил на краката си)?

A)

B)

C)

D)

E)

2008

5008

8002

8005

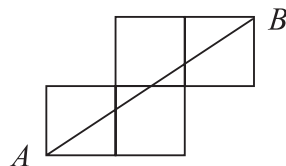
2005

4. Ако $a = 2 - (-4)$, $b = (-2)(-3)$, $c = 2 - 8$, $d = 0 - (-6)$ и $e = (-12) : (-2)$, колко от числата a , b , c , d и e не са равни на 6?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 5

5. Намерете дължината на отсечката AB , ако дължината на страната на всяко от квадратчетата е равна на 1.

A) 5 B) $\sqrt{13}$ C) $\sqrt{5} + \sqrt{2}$
D) $\sqrt{5}$ E) друг отговор



6. Колко най-малко букви трябва да се премахнат от “ЕВРОПЕЙСКО КЕНГУРУ”, така че оставащите букви да бъдат в азбучен ред и да няма повтарящи се между тях?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

7. Всяка буква отговаря на определена цифра и на различните букви съответстват различни цифри. Коя цифра отговаря на буквата **К**?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 8 E) 9

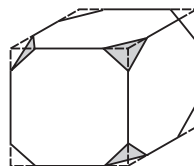
$$\begin{array}{r} + \text{ O K} \\ \text{ K O} \\ \hline \text{ A O A} \end{array}$$

8. Дадени са 2 еднакви книжни правоъгълника. С едно разрязване по права линия на единия от тях Том получава 2 нови правоъгълника, всеки от които е с периметър 40 cm. Също с едно разрязване по права линия на другия правоъгълник Джери получава 2 нови правоъгълника, всеки от които е с периметър 50 cm. Намерете периметъра на един от изходните правоъгълници.

A) 40 cm B) 50 cm C) 60 cm D) 80 cm E) 100 cm

9. На куб са изрязани ъглите, както е показано на фигурата. Намерете броя на ръбовете на полученото тяло.

A) 26 B) 30 C) 36
D) 40 E) 48



10. На един от тестовете получих 20 точки. Най-малко на колко теста следва да се явя допълнително, като трябва да постигна на тях максимален резултат, за да си осигуря среден резултат от 80 точки? Известно е, че тестовете се оценяват с по 100 точки.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

11. Една кутия съдържа 7 карти, които са номерирани с числата от 1 до 7. Росица си избира 3 карти по случаен начин, след което Стефан взима

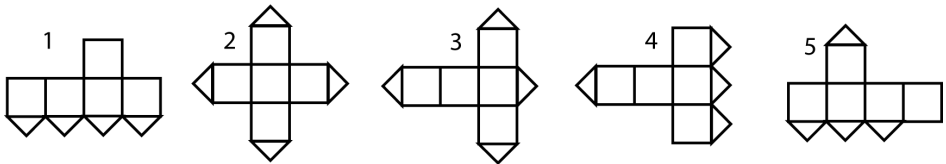
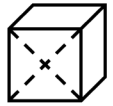
2 от оставащите 4 също напълно случайно. Росица се обръща към Стефан с думите: “Знам със сигурност, че сумата от числата върху твоите карти е четно число”. Намерете сумата от числата върху нейните карти.

- А) 10 В) 12 С) 6 Д) 9 Е) 15

12. Бойко разполага с 10 карти, върху всяка от които е записано точно едно от числата 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 48, 53 и 68. Колко карти най-малко трябва да избере Бойко, така че сумата от числата върху тях да е равна на 100?

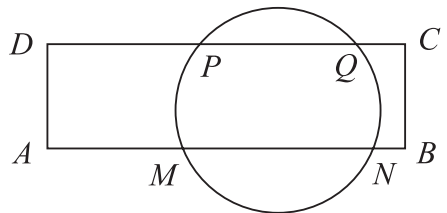
- А) 2 В) 3 С) 4 Д) 5
Е) не е възможно да се направи

13. Една от стените на кубчето е разрязана по диагоналите, както е показано на чертежа. Кои от посочените развивки не са на това кубче?



- А) 1 и 3 В) 1 и 5 С) 3 и 4 Д) 3 и 5 Е) 2 и 4

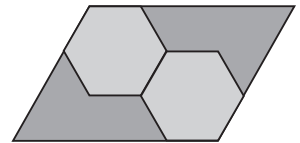
14. Правоъгълникът $ABCD$ пресича окръжността от чертежа в точките M , N , P и Q , като $DP = 4$, $PQ = 5$ и $AM = 3$. Намерете дължината на отсечката MN .



- А) 6 В) 7 С) $\frac{20}{3}$
Д) 8 Е) 9

15. Два шестоъгълника от чертежа са правилни и еднакви. Каква част от лицето на успоредника заемат те?

- А) $\frac{1}{2}$ В) $\frac{1}{3}$ С) $\frac{2}{3}$
Д) $\frac{2}{5}$ Е) $\frac{5}{12}$



16. Шест естествени числа са нанесени върху числовата ос с помощта на точките A , B , C , D , E и F , като разположението им е отбелязано на чер-

тежа. Известно е, че поне две от числата се делят на 3 и поне две от тях са кратни на 5. Кои от тези шест числа се делят на 15? (Отбелязаните точки и чертички върху чертежа фиксират мерната единица.)



- А) A и F В) B и D С) C и E Д) всичките
 Е) само едно от тях

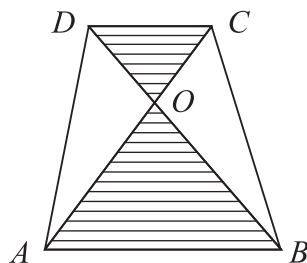
17. Седемте джуджета са родени в един и същи ден, но в 7 последователни години. Общата възраст на трите най-млади сред тях е 42 години. Да се намери общата възраст на трите най-стари джуджета.

- А) 51 В) 54 С) 57 Д) 60 Е) 63

18. Колко най-много цифри трябва да се задраскат в 1000-цифреното число 20082008...2008, за да може сумата от цифрите на оставащото число да е равна на 2 008?

- А) 564 В) 497 С) 500 Д) 601 Е) 746

19. Даден е трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$), диагоналите на който се пресичат в точка O . Дължините на основите AB и CD се отнасят както $7 : 3$. Да се намери колко процента от лицето на трапеца е сумата от лицата на защрихованите триъгълници ABO и CDO .



- А) 62,5% В) 58% С) 52%
 Д) 50% Е) 47,5%

20. Намерете броя на двуцифрените реални числа x и $y \neq 0$, за които сумата $x + y$, произведението xy и частното $\frac{x}{y}$ имат една и съща стойност.

- А) 0 В) 1 С) 2 Д) 4 Е) 8

21. Всяка цифра от третата нататък (включително и третата) в десетичния запис на едно 6-цифрено число е равна на сумата на предните две цифри. Намерете броя на 6-цифрените числа с това свойство.

- А) 0 В) 1 С) 2 Д) 4 Е) 6

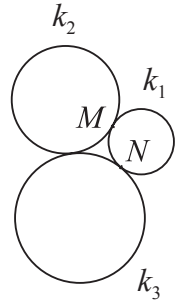
22. Три от стените на дървен куб са оцветени в червено, а другите три – в синьо. Кубът е разделен на 27 единични кубчета. Най-малко колко от тях имат поне по една червена и по една синя стена?

- А) 6 В) 12 С) 14 Д) 16

Е) не може да се определи

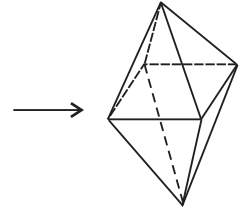
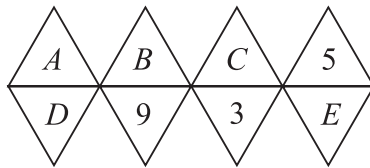
23. Ако $n! = 1.2.3...(n-1).n$ и $n! = 2^{15}.3^6.5^3.7^2.11.13$, намерете n .
 A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

24. Три окръжности k_1 , k_2 и k_3 съответно с радиуси 1, 2 и 3 се допират външно, както е показано на чертежа. Ако M е общата точка на k_1 и k_2 , а N е общата точка на k_1 и k_3 , да се намери дължината на по-голямата дъга \widehat{MN} от k_1 .



- A) $\frac{5\pi}{4}$ B) $\frac{5\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{2}$
 D) $\frac{3\pi}{2}$ E) $\frac{2\pi}{3}$

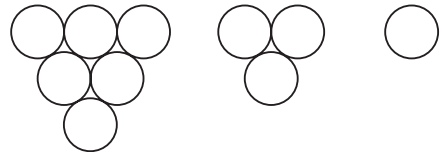
25. Дадена е развивката на пространствено тяло с 8 стени, която е съставена от 8 равностранни триъгълника. Тялото се нарича “магическо”,



ако сумата от числата върху четирите стени във всеки негов връх е една и съща. Заместете буквите A, B, C, D и E с една от цифрите 2, 4, 6, 7 и 8, без да ги повтаряте, така че тялото да стане магическо. На колко е равна сумата $B + D$?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

26. Показаните конструкции се наричат съответно 3-пирамида, 2-пирамида и 1-пирамида. По-общо една конструкция е k -пирамида, ако първият ред в нея включва k топки, вторият ред има $(k - 1)$ топки и т.н., а последният ред съдържа 1 топка. Ако външните топки в една 9-пирамида са зелени, а останалите в нея са жълти, намерете броя на жълтите топки.



- A) 6 B) 10 C) 15 D) 21 E) 28

27. Квадрат 4×4 е разделен на 16 единични квадратчета. Най-много колко диагонала могат да се начертаят в единичните квадратчета, така че никои два от тях да нямат обща точка (включително и краищата им).

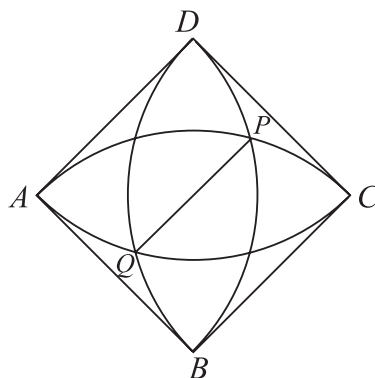
- A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

28. Скоковете на Кенго са дълги или по 1 m, или по 3 m. Кенго иска да се придвижи точно на 10 m разстояние. Намерете броя на всички начини

за това. (Имайте предвид, че например възможностите $1 + 3 + 3 + 3$ и $3 + 3 + 3 + 1$ се считат за различни.)

- A) 27 B) 28 C) 29 D) 30 E) 35

29. Фигурата е съставена от квадрат $ABCD$ със страна 1 и четири четвъртинки от окръжности с центрове A, B, C и D . Намерете дължината на отсечката PQ .



- A) $2 - \sqrt{2}$
 B) $\frac{3}{4}$
 C) $\sqrt{5} - \sqrt{2}$
 D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
 E) $\sqrt{3} - 1$

30. Намерете броя на 2007-цифрените числа, в десетичния запис на които всеки две последователни цифри образуват число, кратно на 17 или 23.

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 9 E) повече от 9