

# СЪДЪРЖАНИЕ

## ВХОДНО НИВО

1. Подготовка за входно ниво № 1 .....	6
2. Подготовка за входно ниво № 2 .....	8
3. Тест с решения .....	10
4. Входно ниво. Тест № 1 и Тест № 2 .....	14

## ТЕМА 1. КЛАСИЧЕСКА ВЕРОЯТНОСТ

5. Множества .....	18
6. Случайни събития .....	20
7. Класическа вероятност .....	22
8. Вероятност на сума на несъвместими събития .....	24
9. Вероятност на противоположно събитие .....	26
10. Вероятност на събитие. Упражнение .....	28
11. Вероятност на обединение, сечение и разлика на събития .....	30
12. Вероятност на сума на съвместими събития. Упражнение .....	32
13. Обобщение на темата "Класическа вероятност" .....	34
14. Тестове върху темата "Класическа вероятност" .....	37

## ТЕМА 2. ФУНКЦИИ

15. Функция, дефиниционно множество .....	40
16. Начини на задаване на функции .....	42
17. Графика на линейната функция. Свойства .....	44
18. Линейна функция. Упражнение .....	46
19. Квадратна функция. Графика на функцията $y = ax^2, a \neq 0$ .....	48
20. Графика на функцията $y = ax^2, a \neq 0$ . Упражнение .....	50
21. Графика на квадратната функция $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ .....	52
22. Растене и намаляване на квадратна функция. Най-малка и най-голяма стойност на квадратна функция .....	54
23. Графично представяне на решенията на уравнение .....	56
24. Обобщение на темата "Функции" .....	58
25. Тестове върху темата "Функции" .....	61

## ТЕМА 3. СИСТЕМИ ЛИНЕЙНИ УРАВНЕНИЯ С ДВЕ НЕИЗВЕСТНИ

26. Линейни уравнения с две неизвестни .....	64
27. Системи линейни уравнения с две неизвестни. Решаване чрез заместване .....	66
28. Решаване чрез заместване на системи линейни уравнения. Упражнение .....	68
29. Взаимно разположение на графики на линейни функции. Изследване броя на решенията на система линейни уравнения .....	70

30. Решаване на системи линейни уравнения чрез събиране .....	72
31. Решаване чрез събиране на системи линейни уравнения. Упражнение .....	74
32. Графично представяне на решенията на системи линейни уравнения с две неизвестни .....	76
33. Решаване чрез полагане на системи линейни уравнения. Упражнение .....	78
34. Моделиране със системи линейни уравнения .....	80
35. Моделиране със системи линейни уравнения. Упражнение .....	82
36. Обобщение на темата "Системи линейни уравнения с две неизвестни" .....	84
37. Тестове върху темата "Системи линейни уравнения с две неизвестни" .....	86

## ТЕМА 4. СИСТЕМИ УРАВНЕНИЯ ОТ ВТОРА СТЕПЕН С ДВЕ НЕИЗВЕСТНИ

38. Системи уравнения от втора степен с две неизвестни. Решаване на системи, на които едното уравнение е от първа степен .....	90
39. Решаване на системи уравнения от втора степен, на които едното уравнение е от първа степен. Упражнение .....	92
40. Системи уравнения с две неизвестни, на които двете уравнения са от втора степен .....	94
41. Решаване на системи уравнения с две неизвестни, на които двете уравнения са от втора степен. Упражнение .....	96
42. Решаване на системи уравнения от втора степен с две неизвестни. Упражнение .....	98
43. Решаване на системи уравнения от втора степен с две неизвестни чрез полагане .....	100
44. Решаване на системи уравнения от втора степен с две неизвестни чрез полагане. Упражнение .....	102
45. Моделиране със системи уравнения от втора степен с две неизвестни .....	104
46. Обобщение на темата "Системи уравнения от втора степен с две неизвестни" .....	106
47. Тестове върху темата "Системи уравнения от втора степен с две неизвестни" .....	109

## ТЕМА 5. ПОДОБНИ ТРИЪГЪЛНИЦИ

48. Пропорционални отсечки .....	112
49. Теорема на Талес. Обратна теорема на Талес .....	114
50. Свойство на ъглополовящите в триъгълник .....	116

51. Свойство на ъглополовящите в триъгълник. Упражнение .....	118
52. Подобни триъгълници. Определение .....	120
53. Първи признак за подобност на триъгълници .....	122
54. Първи признак за подобност на триъгълници. Упражнение .....	124
55. Втори и трети признак за подобност на триъгълници .....	126
56. Свойства на подобните триъгълници .....	128
57. Свойства на подобните триъгълници. Упражнение .....	130
58. Отношение на лицата на подобните триъгълници .....	132
59. Обобщение на темата "Подобни триъгълници" .....	134
60. Тестове върху темата "Подобни триъгълници" .....	137

## ТЕМА 6. РАЦИОНАЛНИ НЕРАВЕНСТВА

61. Обединение и сечение на числови интервали .....	140
62. Неравенство от вида $ ax + b  > c, a \neq 0$ .....	142
63. Системи линейни неравенства с едно неизвестно .....	144
64. Решаване на системи линейни неравенства с едно неизвестно. Упражнение .....	146
65. Двойно неравенство. Неравенство от вида $ ax + b  < c, a \neq 0$ .....	148
66. Неравенства от вида $(ax + b)(cx + d) > 0, \frac{ax + b}{cx + d} > 0$ .....	150
67. Квадратни неравенства .....	152
68. Квадратни неравенства. Упражнение .....	154
69. Метод на интервалите .....	156
70. Приложение на метода на интервалите при решаване на неравенства от по-висока степен .....	158
71. Дробни неравенства .....	160
72. Метод на интервалите. Упражнение .....	162
73. Обобщение на темата "Рационални неравенства" .....	164
74. Тестове върху темата "Рационални неравенства" .....	167

## ТЕМА 7. МЕТРИЧНИ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ОТСЕЧКИ

75. Метрични зависимости между отсечки в правоъгълен триъгълник .....	170
76. Теорема на Питагор .....	172
77. Теорема на Питагор. Упражнение .....	174
78. Намиране дължина на отсечка в правоъгълна координатна система .....	176
79. Решаване на правоъгълен триъгълник .....	178

80. Приложения на метрични зависимости за намиране елементите на правоъгълен триъгълник. Упражнение .....	180
81. Решаване на равнобедрен триъгълник .....	182
82. Решаване на равнобедрен триъгълник. Упражнение .....	184
83. Решаване на равнобедрен и правоъгълен трапец .....	186
84. Решаване на успоредник .....	188
85. Метрични зависимости между отсечки в окръжност .....	190
86. Метрични зависимости между отсечки в окръжност. Упражнение .....	192
87. Обобщение на темата "Метрични зависимости между отсечки" .....	194
88. Тестове върху темата "Метрични зависимости между отсечки" .....	197

## ТЕМА 8. ТРИГОНОМЕТРИЧНИ ФУНКЦИИ НА ОСТЪР ЪГЪЛ

89. Тригонометрични функции на остър ъгъл .....	200
90. Стойности на тригонометрични функции на ъгли с мерки $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ .....	202
91. Основни зависимости между тригонометричните функции на един и същ ъгъл .....	204
92. Тригонометрични функции на остър ъгъл. Упражнение .....	206
93. Тригонометрични функции на остри ъгли, които се допълват до $90^\circ$ .....	208
94. Намиране на основните елементи на правоъгълен триъгълник .....	210
95. Намиране на основните елементи на правоъгълен триъгълник. Упражнение .....	212
96. Намиране елементи на равнобедрен триъгълник .....	214
97. Намиране елементи на равнобедрен и правоъгълен трапец .....	216
98. Приложение на тригонометричните функции на остър ъгъл. Практически задачи .....	218
99. Обобщение на темата "Тригонометрични функции на остър ъгъл" .....	220
100. Тестове върху темата "Тригонометрични функции на остър ъгъл" .....	223

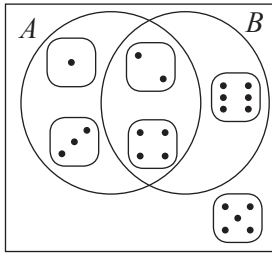
## ИЗХОДНО НИВО

101. Подготовка за изходно ниво № 1 .....	226
102. Подготовка за изходно ниво № 2 .....	228
103. Тест с решения .....	230
104. Изходно ниво. Тест № 1 и Тест № 2 .....	234

ОТГОВОРИ .....	236
----------------	-----

## ВЕРОЯТНОСТ НА ОБЕДИНЕНИЕ, СЕЧЕНИЕ И РАЗЛИКА НА СЪБИТИЯ

**ЗАДАЧА 1** Хвърляме правилен зар. Дадени са събитието  $A = \{\text{падат се по-малко от 5 точки}\}$  и събитието  $B = \{\text{падат се четен брой точки}\}$ . Като използвате диаграмите на Ойлер-Вен, намерете вероятността на обединението, сечението и разликата на събитията  $A$  и  $B$ .



**Решение:** Множеството от всички елементарни събития е

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n = v(\Omega) = 6.$$

Множествата от благоприятните елементарни събития за  $A$  и  $B$  са съответно  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  и  $B = \{2, 4, 6\}$ .

Обединението на събития  $A$  и  $B$  е  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ ,

$$v(A \cup B) = 5 \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{v(A \cup B)}{v(\Omega)} = \frac{5}{6}.$$

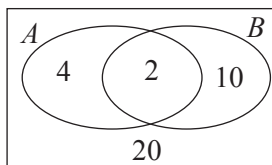
Сечението на събития  $A$  и  $B$  е  $A \cap B = \{2, 4\}$ ,  $v(A \cap B) = 2$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{v(A \cap B)}{v(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Разликата на събития  $A$  и  $B$  е  $A \setminus B = \{1, 3\}$ ,  $v(A \setminus B) = 2 \Rightarrow P(A \setminus B) = \frac{v(A \setminus B)}{v(\Omega)} = \frac{1}{3}$ .

Разликата на събития  $B$  и  $A$  е  $B \setminus A = \{6\}$ ,  $v(B \setminus A) = 1 \Rightarrow P(B \setminus A) = \frac{v(B \setminus A)}{v(\Omega)} = \frac{1}{6}$ .

**ЗАДАЧА 2** Хвърляме два правилни зара – бял и червен. Дадени са събитието  $A = \{\text{на белия зар се падат 3 точки}\}$  и събитието  $B = \{\text{на червения зар се падат не повече от 2 точки}\}$ . Като използвате диаграмите на Ойлер-Вен, намерете вероятността на обединението, сечението и разликата на събитията  $A$  и  $B$ .



**Решение:** Общият брой на всички елементарни събития е  $n = v(\Omega) = 6 \cdot 6 = 36$ .

Множествата от благоприятните елементарни събития за  $A$  и  $B$  са

$A = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$  и

$B = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1),$

$(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2)\}$ .

За обединението имаме  $v(A \cup B) = 16 \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{v(A \cup B)}{v(\Omega)} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$ .

За сечението имаме  $v(A \cap B) = 2 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{v(A \cap B)}{v(\Omega)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ .

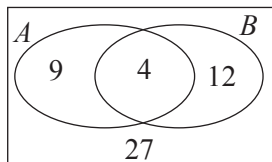
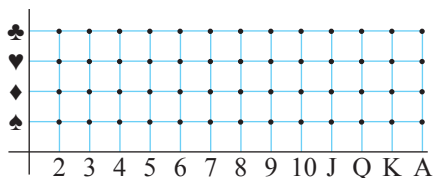
За разликата  $A \setminus B$  имаме  $v(A \setminus B) = 4 \Rightarrow P(A \setminus B) = \frac{v(A \setminus B)}{v(\Omega)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ .

За разликата  $B \setminus A$  имаме  $v(B \setminus A) = 10 \Rightarrow P(B \setminus A) = \frac{v(B \setminus A)}{v(\Omega)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$ .

**ЗАДАЧА 3** Имаме тесте от 52 карти. Без да гледаме, теглим една от тях. Като използвате диаграмите на Ойлер-Вен, намерете вероятността изтеглената карта да е:

- а) спатия или картинка;
- б) спатия и картинка;
- в) спатия, но не и картинка;
- г) картинка, но не и спатия.

**Решение:**



Означаваме събитията

$A = \{\text{изтеглената карта е спатия } (\spadesuit)\};$

$B = \{\text{изтеглената карта е картинка (J, Q, K или A)}\}.$

а) спатия или картинка ( $A \cup B$ ),

$$P(A \cup B) = \frac{25}{52};$$

в) спатия, но не картинка ( $A \setminus B$ ),

$$P(A \setminus B) = \frac{9}{52};$$

б) спатия и картинка ( $A \cap B$ ),

$$P(A \cap B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13};$$

г) картинка, но не спатия ( $B \setminus A$ ),

$$P(B \setminus A) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}.$$

**ЗАДАЧА 4**

В кутия има 7 бели и 7 черни топки. Белите са номерирани с числата от 1 до 7. Черните също са номерирани с числата от 1 до 7. Без да гледаме, теглим една топка. Като използвате диаграмите на Ойлер-Вен, намерете вероятността изтеглената топка да е:

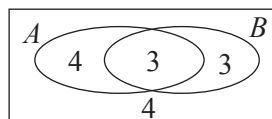
а) бяла или с четен номер;

в) бяла, но не и с четен номер;

б) бяла и с четен номер;

г) с четен номер, но не и бяла.

**Решение:**



Означаваме събитията

$A = \{\text{изтеглената топка е бяла}\};$

$B = \{\text{изтеглената топка е с четен номер (2, 4 или 6)}\}.$

а) бяла или с четен номер ( $A \cup B$ ),

$$P(A \cup B) = \frac{10}{14} = \frac{5}{7};$$

в) бяла, но не и с четен номер ( $A \setminus B$ ),

$$P(A \setminus B) = \frac{4}{14} = \frac{2}{7};$$

б) бяла и с четен номер ( $A \cap B$ ),

$$P(A \cap B) = \frac{3}{14};$$

г) с четен номер, но не и бяла ( $B \setminus A$ ),

$$P(B \setminus A) = \frac{3}{14}.$$

**ЗАДАЧИ**

**1.** Имаме тесте от 52 карти. Без да гледаме, теглим една от тях. Като използвате диаграмите на Ойлер-Вен, намерете вероятността изтеглената карта да е:

а) червена или картинка;

б) червена и картинка;

в) червена, но не и картинка;

г) картинка, но не и червена.

**2.** В кутия има 10 бели и 10 черни топки. Белите са номерирани с числата

от 1 до 10. Черните също са номерирани с числата от 1 до 10. Без да гледаме, теглим една топка. Като използвате диаграмите на Ойлер-Вен, намерете вероятността изтеглената топка да е:

а) черна или с номер, кратен на 5;

б) бяла и с номер, кратен на 5;

в) черна, но не и с номер, кратен на 5;

г) с номер, кратен на 5, но не и черна.

## ПЪРВИ ПРИЗНАК ЗА ПОДОБНОСТ НА ТРИЪГЪЛНИЦИ

За да докажем, че два триъгълника са подобни, използваме теореми (признаци), аналогични на тези за еднакви триъгълници. Тези признаци осигуряват подобие на два триъгълника само по равенство на някои от ъглите и пропорционалност на някои от страните.

**T**

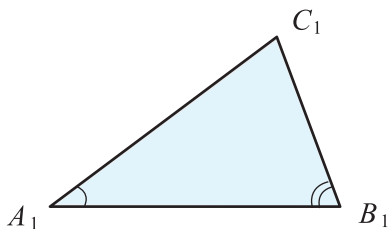
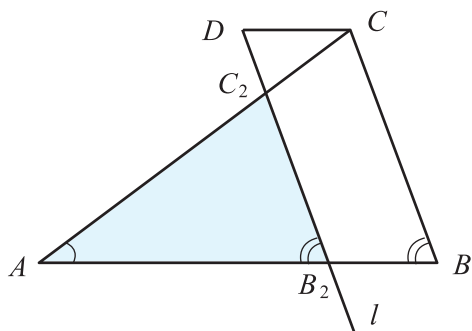
### I признак

Ако два ъгъла на един триъгълник са съответно равни на два ъгъла от друг триъгълник, то триъгълниците са подобни.

**Дадено:**  $\triangle ABC$  и  $\triangle A_1B_1C_1$ ,  
 $\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$ ,  $\sphericalangle B = \sphericalangle B_1$

**Да са докаже:**  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

**Доказателство:**



$$1. \left. \begin{array}{l} \sphericalangle C = 180^\circ - (\sphericalangle A + \sphericalangle B) \\ \sphericalangle C_1 = 180^\circ - (\sphericalangle A_1 + \sphericalangle B_1) \end{array} \right\} \Rightarrow \sphericalangle C = \sphericalangle C_1$$

2. Построяваме:

$$\text{точка } B_2 : \begin{cases} B_2 \in AB \rightarrow \\ AB_2 = A_1B_1 \end{cases}; \text{ права } l : \begin{cases} B_2 \in l \\ l \parallel BC \end{cases}$$

$$l \cap AC = C_2.$$

$$3. \left. \begin{array}{l} \sphericalangle B = \sphericalangle B_1 \text{ (по условие)} \\ \sphericalangle B = \sphericalangle B_2 \text{ (съответни)} \end{array} \right\} \Rightarrow \sphericalangle B_2 = \sphericalangle B_1$$

4. Разглеждаме  $\triangle AB_2C_2$  и  $\triangle A_1B_1C_1$ .

$$\left. \begin{array}{l} \sphericalangle A = \sphericalangle A_1 \text{ (по условие)} \\ \sphericalangle B_2 = \sphericalangle B_1 \text{ (от 3.)} \\ AB_2 = A_1B_1 \text{ (по построение)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AB_2C_2 \cong \triangle A_1B_1C_1 \text{ (II признак)}$$

$$\Rightarrow AC_2 = A_1C_1, B_2C_2 = B_1C_1$$

$$5. BC \parallel B_2C_2 \Rightarrow \frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2} \Rightarrow \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

$$6. \text{ Построяваме точка } D : \left\{ \begin{array}{l} D \in B_2C_2 \\ CD \parallel AB. \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \text{От } CD \parallel AB \\ B_2D \parallel BC \end{array} \right\} \Rightarrow B_2BCD - \text{ успоредник}$$

$$\Rightarrow B_2D = BC.$$

$$7. AB_2 \parallel CD \Rightarrow \frac{C_2C}{C_2A} = \frac{C_2D}{C_2B_2} \text{ (Теорема на Талес)}$$

$$\Rightarrow \frac{C_2C}{C_2A} + 1 = \frac{C_2D}{C_2B_2} + 1 \Rightarrow \frac{C_2C + C_2A}{C_2A} = \frac{C_2D + C_2B_2}{C_2B_2} \Rightarrow \frac{AC}{AC_2} = \frac{B_2D}{B_2C_2}$$

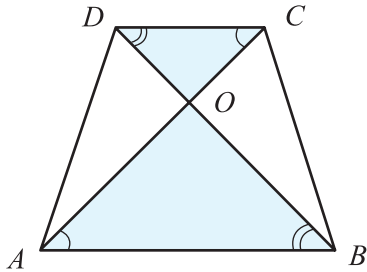
$$\Rightarrow \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$$

$$\begin{array}{l} \text{8. От 5. и от 7. } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{BA}{B_1A_1} \quad \Bigg| \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1 \\ \text{От 1. } \Rightarrow \sphericalangle C = \sphericalangle C_1. \quad \Bigg| \text{ (съгласно определението за} \\ \text{подобни триъгълници).} \end{array}$$

**ЗАДАЧА 1** В трапец  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) диагоналите  $AC$  и  $BD$  се пресичат в точка  $O$ . Докажете, че:

а)  $\triangle ABO \sim \triangle CDO$ ;                      б)  $AO \cdot DO = BO \cdot CO$ .

**Решение:**



а) Разглеждаме  $\triangle ABO$  и  $\triangle CDO$ .

$$\begin{array}{l} \sphericalangle A = \sphericalangle C \text{ (кръстни ъгли)} \\ \sphericalangle B = \sphericalangle D \text{ (кръстни ъгли)} \\ \Rightarrow \triangle ABO \sim \triangle CDO \text{ (I признак)} \end{array}$$

б) От  $\triangle ABO \sim \triangle CDO$

$$\Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO}$$

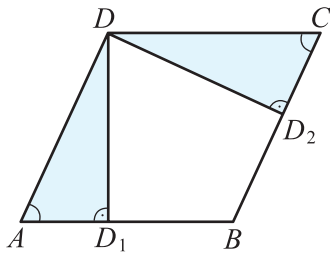
$$\Rightarrow \frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO}$$

$$\Rightarrow AO \cdot DO = BO \cdot CO.$$

**ЗАДАЧА 2** В успоредник  $ABCD$   $DD_1$  ( $D_1 \in AB$ ) и  $DD_2$  ( $D_2 \in BC$ ) са височини. Докажете, че:

а)  $\triangle ADD_1 \sim \triangle CDD_2$ ;                      б)  $AD : CD = DD_1 : DD_2$ .

**Решение:**



а) Разглеждаме  $\triangle ADD_1$  и  $\triangle CDD_2$ .

$$\begin{array}{l} \sphericalangle A = \sphericalangle C \text{ (срещуположни ъгли в успоредник)} \\ \sphericalangle D_1 = \sphericalangle D_2 = 90^\circ \text{ (} DD_1 \text{ и } DD_2 \text{ – височини)} \\ \Rightarrow \triangle ADD_1 \sim \triangle CDD_2 \text{ (I признак)} \end{array}$$

б) От  $\triangle ADD_1 \sim \triangle CDD_2$

$$\Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{DD_1}{DD_2}$$

$$\Rightarrow AD : CD = DD_1 : DD_2.$$

- ЗАДАЧИ**
- Ако страните на два триъгълника са две по две взаимноуспоредни, докажете, че триъгълниците са подобни.
  - Докажете, че два правоъгълни триъгълника са подобни, ако:
    - са равнобедрени;
    - остър ъгъл от единия триъгълник е равен на остър ъгъл от другия триъгълник.
  - Докажете, че два равнобедрени триъгълника са подобни, ако:
    - ъглите между бедрата им са равни;
    - ъгъл при основата на единия триъгълник е равен на ъгъл при основата на другия триъгълник.