

СЪДЪРЖАНИЕ

ВХОДНО НИВО

1. Тест с решения 6
2. Входно ниво. Тест № 1 и Тест № 2 11

ТЕМА 1. ЦЕЛИ ИЗРАЗИ

3. Рационален израз. Променливи и постоянни величини..... 14
4. Числена стойност на израз..... 16
5. Едночлен. Нормален вид на едночлен 18
6. Събиране и изваждане на едночлени. Подобни едночлени 20
7. Събиране и изваждане на едночлени. Подобни едночлени. Упражнение 22
8. Умножение, степенуване и деление на едночлени 24
9. Многочлен. Нормален вид на многочлен 26
10. Събиране и изваждане на многочлени..... 28
11. Умножение на многочлен с едночлен 30
12. Умножение на многочлен с многочлен..... 32
13. Умножение на многочлен с многочлен. Упражнение..... 34
14. Тъждествени изрази..... 36
15. Тъждествата $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ 38
16. Тъждествата $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. Упражнение..... 40
17. Тъждествата $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ 42
18. Тъждеството $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ 44
19. Формули за съкратено умножение. Упражнение..... 46
20. Тъждествата $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$ 48
21. Формули за съкратено умножение. Приложение 50
22. Разлагане многочлени на множители чрез изнасяне на общ множител 52
23. Разлагане чрез формулите за съкратено умножение 54
24. Разлагане чрез формулите за съкратено умножение. Упражнение 56
25. Разлагане чрез групиране..... 58
26. Разлагане чрез комбинирано използване на различни методи..... 60
27. Разлагане чрез комбинирано използване на различни методи. Упражнение 62
28. Тъждествено преобразуване на изрази. Приложения..... 64
29. Обобщение на темата „Цели изрази“ 66

30. Тестове върху темата „Цели изрази“ 69

ТЕМА 2. УРАВНЕНИЯ

31. Уравнение с едно неизвестно. Преговор с допълнение..... 72
32. Еквивалентни уравнения..... 74
33. Линейни уравнения 76
34. Линейни уравнения. Упражнение 78
35. Уравнението $(ax + b)(cx + d) = 0$ 80
36. Уравнението $|ax + b| = c$ 82
37. Уравнения, свеждащи се до линейни..... 84
38. Моделиране с линейни уравнения 86
39. Моделиране с линейни уравнения. Упражнение..... 88
40. Задачи от движение 90
41. Задачи от движение. Упражнение..... 92
42. Задачи от работа 94
43. Задачи от работа. Упражнение 96
44. Задачи от капитал..... 98
45. Задачи от смеси и сплави..... 100
46. Обобщение на темата „Уравнения“ 102
47. Тестове върху темата „Уравнения“ 105

ТЕМА 3. ОСНОВНИ ГЕОМЕТРИЧНИ ФИГУРИ

48. Въведение в геометрията..... 108
49. Основни геометрични фигури и построения..... 110
50. Съседни ъгли, противоположни ъгли. Перпендикулярни прави 112
51. Съседни ъгли, противоположни ъгли. Перпендикулярни прави. Упражнение 114
52. Построения с линия и пергел..... 116
53. Ъгли, получени при пресичането на две прави с трета..... 118
54. Признаци за успоредност на две прави..... 120
55. Аксиома за успоредните прави 122
56. Свойства на успоредните прави..... 124
57. Триъгълник..... 126
58. Сбор на ъглите в триъгълник..... 128
59. Външен ъгъл на триъгълник..... 130
60. Триъгълник. Упражнение..... 132
61. Обобщение на темата „Основни геометрични фигури“ 134
62. Тестове върху темата „Основни геометрични фигури“ 137

ТЕМА 4. ЕДНАКВИ ТРИЪГЪЛНИЦИ

63. Еднакви триъгълници. Въведение	140
64. Първи признак за еднаквост на триъгълници	142
65. Първи признак за еднаквост на триъгълници. Упражнение.....	144
66. Втори признак за еднаквост на триъгълници	146
67. Първи и втори признак за еднаквост на триъгълници. Упражнение	148
68. Равнобедрен триъгълник. Равностранен триъгълник	150
69. Равнобедрен триъгълник. Равностранен триъгълник. Упражнение	152
70. Симетрала на отсечка. Построяване на симетрала на дадена отсечка	154
71. Симетрала на отсечка. Упражнение	156
72. Трети признак за еднаквост на триъгълници	158
73. Перпендикуляр от точка до права	160
74. Правоъгълен триъгълник с ъгъл 30°	162
75. Правоъгълен триъгълник с ъгъл 30° . Упражнение.....	164
76. Медиана към хипотенузата в правоъгълен триъгълник	166
77. Медиана към хипотенузата в правоъгълен триъгълник. Упражнение	168
78. Признак за еднаквост на два правоъгълни триъгълника	170
79. Ъглополовяща на ъгъл. Построяване на Ѫглополовяща на даден ъгъл.....	172
80. Ъглополовяща на ъгъл. Упражнение	174
81. Височина, Ѫглополовяща и медиана в равнобедрен триъгълник	176
82. Обобщение на темата „Еднакви триъгълници“	178
83. Тестове върху темата „Еднакви триъгълници“	181

ТЕМА 5. НЕРАВЕНСТВА

84. Числови неравенства. Въведение	184
85. Числови неравенства. Свойства	186
86. Линейно неравенство с едно неизвестно.....	188
87. Еквивалентни неравенства.....	190
88. Линейно неравенство. Упражнение	192
89. Представяне решенията на линейно неравенство с числови интервали и графично върху числова ос	194
90. Неравенства, свеждащи се до линейни.....	196
91. Неравенства. Упражнение	198
92. Приложение на линейните неравенства.....	200

93. Уравнения и неравенства. Упражнение	202
94. Неравенства между страни и ъгли в триъгълника.....	204
95. Неравенства между страни и ъгли в триъгълника. Упражнение.....	206
96. Неравенство на триъгълника	208
97. Неравенство на триъгълника. Упражнение.....	210
98. Обобщение на темата „Неравенства“	212
99. Тест върху темата „Неравенства“	215

ТЕМА 6. УСПОРЕДНИК

100. Успоредник. Свойства	218
101. Успоредник. Свойства. Упражнение	220
102. Признаци за успоредник	222
103. Успоредник. Упражнение.....	224
104. Правоъгълник	226
105. Ромб.....	228
106. Квадрат.....	230
107. Видове успоредници. Упражнение	232
108. Обобщение на темата „Успоредник“	234
109. Тестове върху темата „Успоредник“	237

ТЕМА 7. ЕЛЕМЕНТИ ОТ ВЕРОЯТНОСТИ И СТАТИСТИКА

110. Организиране и представяне на данни. Построяване и интерпретиране на кръгови диаграми	240
111. Задачи от вероятност на събития.....	242
112. Практически задачи върху темата „Елементи от вероятности и статистика“	244
113. Тестове върху темата „Елементи от вероятности и статистика“	247

ТЕМА 8. ПОСТРОЕНИЯ С ЛИНИЯ И ПЕРГЕЛ

114. Построяване на триъгълник по две страни и ъгъл между тях	250
115. Построяване на триъгълник по страна и два прилежащи ъгъла.....	252
116. Построяване на триъгълник по три страни	254
117. Построяване на успоредник	256

ИЗХОДНО НИВО

118. Подготовка за изходно ниво № 1	260
119. Подготовка за изходно ниво № 2	262
120. Тест с решения	264
121. Изходно ниво. Тест № 1 и Тест № 2	268

ОТГОВОРИ.....	270
---------------	-----

ЗАДАЧА 1 Докажете тъждествата:

(1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

(2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Решение:

$$\underbrace{(a+b)^2}_u = \underbrace{a^2 + 2ab + b^2}_v$$

$$\begin{aligned} u &= (a+b)^2 = (a+b)(a+b) = \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 = \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

$$v = a^2 + 2ab + b^2$$

Следва, че $u = v$, т.е. равенството (1) е тъждество.

$$\underbrace{(a-b)^2}_u = \underbrace{a^2 - 2ab + b^2}_v$$

$$\begin{aligned} u &= (a-b)^2 = (a-b)(a-b) = \\ &= a^2 - ab - ab + b^2 = \\ &= a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

$$v = a^2 - 2ab + b^2$$

Следва, че $u = v$, т.е. равенството (2) е тъждество.Тъждествата от *Задача 1* обосновахме, като използвахме знанията за степени и действия с многочлени. Тъждествата (1) и (2) са верни за всяка стойност на a и b и са известни като формули за съкратено умножение.**Формули за съкратено умножение:** $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.**ЗАПОМНЕТЕ!**

(1) $(\underset{I}{a} + \underset{II}{b})^2 = \underset{I}{a}^2 + 2\underset{I}{a}\underset{II}{b} + \underset{II}{b}^2$,

Квадратът на сбор от два израза a и b е равен на квадрата на първия израз плюс удвоеното произведение на I и II израз, плюс квадрата на втория израз.

(2) $(\underset{I}{a} - \underset{II}{b})^2 = \underset{I}{a}^2 - 2\underset{I}{a}\underset{II}{b} + \underset{II}{b}^2$.

Квадратът на разлика от два израза a и b е равен на квадрата на първия израз минус удвоеното произведение на I и II израз, плюс квадрата на втория израз.

Записваме схематично:

$$(I + II)^2 = I^2 + 2 \cdot I \cdot II + II^2$$

$$(I - II)^2 = I^2 - 2 \cdot I \cdot II + II^2$$

Четем:

$$(\text{първото} + \text{второто})^2 =$$

$$= \text{първото}^2 + 2 \text{ пъти първото} \cdot \text{второто} + \text{второто}^2$$

$$(\text{първото} - \text{второто})^2 =$$

$$= \text{първото}^2 - 2 \text{ пъти първото} \cdot \text{второто} + \text{второто}^2$$

ЗАДАЧА 2 Извършете степенуването:

а) $(x+y)^2$; $(x-y)^2$;

б) $(x+5)^2$; $(x-5)^2$.

Решение:

а) $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

б) $(x+5)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$

$$(x-5)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$$

ЗАДАЧА 3 Извършете степенуването:

а) $(1+2x)^2$; $(1-2x)^2$;

б) $(3a+5b)^2$; $(3a-5b)^2$.

Решение:

а) $(1+2x)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2x + (2x)^2 = 1 + 4x + 4x^2$

$(1-2x)^2 = 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2x + (2x)^2 = 1 - 4x + 4x^2$

б) $(3a+5b)^2 = (3a)^2 + 2 \cdot 3a \cdot 5b + (5b)^2 = 9a^2 + 30ab + 25b^2$

$(3a-5b)^2 = (3a)^2 - 2 \cdot 3a \cdot 5b + (5b)^2 = 9a^2 - 30ab + 25b^2$

ЗАДАЧА 4 Опростете изразите:

а) $(x+3)^2 - (1-x)^2$;

б) $(2x+3)^2 - 2(x-5)^2 - x(2x+7)$.

Решение:

а) $(x+3)^2 - (1-x)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - (1^2 - 2 \cdot 1 \cdot x + x^2) =$

$= x^2 + 6x + 9 - 1 + 2x - x^2 = 8x + 8$

б) $(2x+3)^2 - 2(x-5)^2 - x(2x+7) =$

$= (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 - 2(x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2) - 2x^2 - 7x =$

$= 4x^2 + 12x + 9 - 2x^2 + 20x - 50 - 2x^2 - 7x = 25x - 41$

Геометричен смисъл на формулата за съкратено умножение
 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ Ако $a > 0$, $b > 0$, твърдението $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ има следното геометрично тълкуване:

$$a+b \begin{array}{|c|} \hline (a+b)^2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline ab & b^2 \\ \hline a^2 & ab \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} b \\ a \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline a^2 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline ab \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline ab \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline b^2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline a^2 \\ \hline \end{array} + 2 \begin{array}{|c|} \hline ab \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline b^2 \\ \hline \end{array} .$$

ЗАДАЧИ

Извършете степенуването:

1. $(x-1)^2$; $(1-x)^2$; $(x-2)^2$;

2. $(a+1)^2$; $(a-1)^2$; $(a+2)^2$;

3. $(2x+1)^2$; $(2x-1)^2$; $(1+2x)^2$;

4. $(x+a)^2$; $(b-x)^2$; $(a+c)^2$;

5. $(2x+y)^2$; $(x+2y)^2$; $(x+5y)^2$;

6. $(2m-3)^2$; $(3a-2)^2$; $(5-3b)^2$;

7. $(5+4a)^2$; $(5-4a)^2$; $(6x-y)^2$;

8. $(2a+5b)^2$; $(3m+2n)^2$; $(6a+7c)^2$;

9. $(5a-2b)^2$; $(2m-3n)^2$; $(7a-6c)^2$.

Приведете в нормален вид изразите:

10. $(x+y)^2 + (x-y)^2$; $(x+y)^2 - (x-y)^2$;

11. $(a-b)^2 + (a+b)^2$; $(a-b)^2 - (a+b)^2$;

12. $2(x-1) + (x-1)^2$; $2(x-1) - (x-1)^2$;

13. $(a-x)^2 + 2(3-x)^2$; $(x+1)^2 + 2(x+2)^2$;

14. $(a-x)^2 - 2(3-x)^2$; $(x+1)^2 - 2(x-2)^2$.

Някои от задачите, свързани с извършване на определена работа, решаваме чрез зависимостта $A = N \cdot t$, където A е количеството свършена работа; t е времето, за което е свършена работата A ; N е нормата (производителността), т.е. работата за единица време.

Тази зависимост прилича на формулата за пътя при равномерното движение $S = v \cdot t$, където изминатият път S е свършената работа A , а скоростта v е работата за единица време.

ЗАДАЧА 1 Конвейер в автомобилен завод сглобява за 24 дни определено количество автомобили. Той работил 22 дни с увеличена с 5 автомобили на ден норма и от конвейера слезли 80 автомобили над определеното количество. Да се намери дневната норма на конвейера по план.

Решение:

Означаваме дневната норма N с x (автомобила), ДС: $x > 0$, цяло число.

	N	t (дни)	A
по план	x	24	$24x = A_{\text{план}}$
в действит.	$x + 5$	22	$22(x + 5) = A_{\text{д}}$

$$\begin{aligned} A_{\text{план}} &< A_{\text{д}} \\ A_{\text{план}} + 80 &= A_{\text{д}} \\ 24x + 80 &= 22(x + 5) \\ x &= 15, x \in \text{ДС} \end{aligned}$$

Отг. Дневната норма по план е 15 автомобиля.



В Задача 1 получихме, че $A_{\text{план}} < A_{\text{действителност}}$ с a автомобиля.

Записването на уравнение може да стане по три начина:

$$A_{\text{план}} = A_{\text{действителност}} - a \quad (1)$$

$$A_{\text{план}} + a = A_{\text{действителност}} \quad (2)$$

$$A_{\text{действителност}} - A_{\text{план}} = a \quad (3)$$

В Задача 1 използвахме (2).

ЗАДАЧА 2 Асен се подготвял за изпит и трябвало да реши даден брой задачи за определен срок, като решава по 15 задачи на ден. Първите три дни той работил по план. След това увеличил дневната си норма с 20% и решил всички задачи 4 дни преди срока. Колко са дадените задачи и за колко дни ги е решил Асен?

Решение:

Означаваме с x времето по план (дни), ДС: $x > 0$, цяло число.

Дадените задачи са $15x$, а времето, за което те са решени, е $(x - 4)$ дни.

Увеличената норма е $15 + 20\% \cdot 15 = 18$ задачи.

Времето, през което Асен решава с увеличена норма, е $(x - 3) - 4 = x - 7$.

	N	t (дни)	A
по план	15	x	$15x$
в действителност	18	$x - 7$	$18(x - 7)$

$$\begin{aligned} A_{\text{план}} &= A_{\text{действителност}} \\ 15x &= 18(x - 7) \\ x &= 27, 27 \in \text{ДС} \end{aligned}$$

Отг. Дадени са 405 задачи и те са решени за $x - 4 = 23$ дни.

ЗАДАЧА 3 За да изоре един блок в определен срок, тракторист трябвало да изорава по 90 дка на ден. Трактористът изоравал по 105 дка на ден и затова един ден преди срока му останали само 15 дка. Колко декара е бил блокът?

Решение:

I начин: Означаваме с x декарите на блока, ДС: $x > 15$.

	N	t (дни)	A (дка)
по план	90	$\frac{x}{90}$	x
в действит.	105	$\frac{x-15}{105}$	$x-15$

$$t_{\text{пл}} = t_{\text{д}} + 1$$

$$\frac{x}{90} = \frac{x-15}{105} + 1$$

$$x = 540, 540 \in \text{ДС}$$

Отг. Блокът е 540 дка.

II начин: Означаваме с x дните по план, ДС: $x > 0$, цяло число.

	N	t (дни)	A (дка)
по план	90	x	$90x$
в действит.	105	$x-1$	$105(x-1)$

Остават 15 дка.

$$A_{\text{план}} = A_{\text{действителност}} + 15$$

$$90x = 105(x-1) + 15$$

$$x = 6, 6 \in \text{ДС}$$

Дните по план са 6.

Отг. Блокът е $6 \cdot 90 = 540$ дка



При решаване на Задача 2 по I начин с x означихме величината, която се търси. По II начин избрахме за x времето по план и съставихме уравнение без знаменатели, което се решава по-лесно.

ЗАДАЧИ

1. Един стругар изработва за 12 дни определено количество детайли. Като увеличил дневната си норма с 5 детайла, той работил 11 дни и изработил 40 детайла над определеното количество. Намерете:
 - а) дневната норма на стругаря;
 - б) колко детайла е трябвало да изработи.
2. Трактористи запланивали да изорат една нива, като изорават по 120 ха на ден. След първите два дни те увеличили нормата си с 50% и завършили оранта с 2 дни предсрочно. Колко хектара е цялата нива и за колко дни е била изорана?
3. За да окосят една нива за определен срок, косачи трябвало да окосяват

по 15 дка дневно. Първите 4 дни те работили с тази норма, а след това увеличили нормата си с $33\frac{1}{3}\%$ от заплануваната, поради което съкратили срока с 1 ден. Намерете:

- а) колко декара е целият блок;
- б) за колко дни е окосен;
- в) за колко дни по план е трябвало да бъде окосен.

4. Един цех трябвало да произвежда дневно по 180 чифта обувки от даден модел. Поради допълнителна поръчка дневното производство се увеличило с 15 чифта и един ден преди срока цехът произвел 120 чифта обувки повече. Колко чифта обувки от този модел е трябвало да произведе цехът по план?