

# СЪДЪРЖАНИЕ

## ВХОДНО НИВО

1. Входно ниво. Тест с решения ..... 6
2. Входно ниво  
Тест № 1 ..... 12  
Тест № 2 ..... 13

Указания за решаване на тестовете, дадени в този учебник ..... 14

## ТЕМА 1. СТЕПЕН И ЛОГАРИТЪМ

3. Корен трети. Свойства ..... 16
4. Корен  $n$ -ти. Свойства ..... 20
5. Преобразуване на ирационални изрази ... 24
6. Преобразуване на ирационални изрази.  
Упражнение ..... 28
7. Функция. Графики на функция.  
Преговор с допълнение ..... 32
8. Графика на функцията  $y = \sqrt{x}$  ..... 38
9. Графики на функциите  $y = x^3$  и  $y = \sqrt[3]{x}$  ... 42
10. Степен с цял показател. Преговор ..... 48
11. Степен с рационален степенен показател. Свойства ..... 52
12. Преобразуване на изрази,  
съдържащи степен  
с рационален степенен показател ..... 56
13. Показателна функция. Графика на  
показателната функция ..... 60
14. Логаритъм. Основни свойства ..... 66
15. Логаритъм. Упражнение ..... 70
16. Логаритъм. Сравняване на логаритми ..... 74
17. Логаритмична функция. Графика на  
логаритмичната функция ..... 78
18. Логаритмуване на произведение,  
частно, степен и корен ..... 84
19. Логаритмуване на произведение,  
частно, степен и корен. Упражнение ..... 88
20. Обобщение на темата  
„Степен и логаритъм“ ..... 92
21. Тестове върху темата „Степен и логаритъм“  
Тест № 1 ..... 99  
Тест № 2 ..... 100

## ТЕМА 2. РЕШАВАНЕ НА РАВНИННИ ФИГУРИ

22. Решаване на триъгълник (преговор) ..... 102
23. Решаване на успоредник ..... 106
24. Решаване на успоредник. Упражнение .. 110
25. Решаване на трапец ..... 114
26. Решаване на трапец. Упражнение ..... 120
27. Решаване на равнобедрен трапец.  
Упражнение ..... 124
28. Решаване на четириъгълник ..... 128
29. Решаване на четириъгълник.  
Упражнение ..... 134
30. Решаване на правилен многоъгълник ... 138
31. Решаване на правилен многоъгълник.  
Упражнение ..... 142
32. Обобщение на темата  
„Решаване на равнинни фигури“ ..... 148
33. Тестове върху темата  
„Решаване на равнинни фигури“  
Тест № 1 ..... 155  
Тест № 2 ..... 156

## ТЕМА 3. ТРИГОНОМЕТРИЯ

34. Обобщен ъгъл. Радиан ..... 158
35. Тригонометрични функции  
на обобщен ъгъл ..... 162
36. Основни тригонометрични тъждества .. 168
37. Ос на тангенсите и ос на котангенсите .. 172
38. Четност, нечетност и периодичност  
на тригонометрични функции ..... 176
39. Графика на функцията  $y = \sin x$  ..... 180
40. Графика на функцията  $y = \cos x$  ..... 184
41. Графика на функцията  $y = \operatorname{tg} x$  ..... 188
42. Графика на функцията  $y = \operatorname{cotg} x$  ..... 192
43. Формули за синус и косинус от сбор  
и разлика на два ъгъла ..... 196
44. Формули за тангенс и котангенс от сбор  
и разлика на два ъгъла ..... 200
45. Формули за тригонометрични функции  
от сбор и разлика на два ъгъла.  
Упражнение ..... 202

46. Формули за тригонометрични функции от удвоен ъгъл .....	204	56. Действия с вероятности. Упражнение ...	232
47. Формули за тригонометрични функции от половинка ъгли. Упражнение .....	206	57. Модели на многократни експерименти с два възможни изхода.....	234
48. Формули за сбор и разлика на тригонометрични функции .....	210	58. Разпределения на вероятностите със сума 1.....	240
49. Формули за произведение на тригонометрични функции .....	214	59. Геометрична вероятност върху правата като отношение на дължини на интервали.....	242
50. Преобразуване на тригонометрични изрази. Упражнение.....	216	60. Геометрична вероятност в равнината като отношение на лица на фигури.....	246
51. Обобщение на темата „Тригонометрия“ .....	218	61. Обобщение на темата „Вероятности“.....	250
52. Тестове върху темата „Тригонометрия“		62. Тестове върху темата „Вероятности“	
Тест № 1 .....	223	Тест № 1 .....	255
Тест № 2 .....	224	Тест № 2 .....	256

#### **ТЕМА 4. ВЕРОЯТНОСТИ**

53. Класическа вероятност (преговор).....	226
54. Условна вероятност. Теорема за умножение на вероятностите .....	228
55. Независимост. Теорема за умножение на вероятностите на независими събития ..	230

#### **ИЗХОДНО НИВО**

63. Изходно ниво. Тест с решения .....	258
64. Изходно ниво.	
Тест № 1 .....	264
Тест № 2 .....	265

<b>ОТГОВОРИ</b> .....	266
-----------------------	-----

## СТЕПЕН С РАЦИОНАЛЕН СТЕПЕНЕН ПОКАЗАТЕЛ. СВОЙСТВА

Досега разгледахме само степени с цял показател. В този урок ще дефинираме степен с рационален показател. Дефинирането на степента  $a^r$  (където  $a > 0$ , а  $r$  е рационално число) трябва да стане по такъв начин, че да бъде спазен принципът за перманентност, т.е. и за разширеното понятие **степен с рационален показател** да останат в сила всички правила (свойства) на степените с цял показател.

Ще припомним, че едно число  $r$  е рационално, когато може да се представи като частно на две цели числа. От това определение следва, че всяко рационално число  $r$  можем да представим и във вида  $r = \frac{m}{n}$ , където числителят  $m$  е цяло число, а знаменателят  $n$  е естествено число, т.е.  $r = \frac{m}{n}$ ,  $r \in \mathbb{Q}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

### Степен с положителен дробен показател

Според правилото за степенуване на степен, ако  $m$  и  $n$  са цели числа, то

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

Искаме това правило да бъде в сила и при дробни показатели  $m$  и  $n$ .

Например при  $m = \frac{3}{2}$ ,  $n = 2$  трябва да е изпълнено равенството

$$(1) \left(a^{\frac{3}{2}}\right)^2 = a^{\frac{3}{2} \cdot 2} = a^3.$$

Знаем, че неотрицателният корен на уравнението  $x^2 = A$  ( $A \geq 0$ ) е  $x = \sqrt{A}$ .

В равенството (1) нека  $x = a^{\frac{3}{2}}$ ,  $A = a^3$ . Тогава от (1), при условие че  $a^3 \geq 0$ , получаваме

$$(2) a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{a^3}.$$

Така стигаме до извода, че е целесъобразно да се даде следното определение:

**O**

Ако  $a \geq 0$  и  $m$  и  $n \geq 2$  са естествени числа, то  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ .

### ПРИМЕРИ

$$5^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{5^3} = \sqrt[7]{125}$$

$$2^{\frac{5}{9}} = \sqrt[9]{2^5} = \sqrt[9]{32}$$

$$3^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{3^2} = \sqrt[7]{9}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{9}{16}}$$

$$a^{\frac{5}{2}} = \sqrt{a^5} = a^2 \sqrt{a} \quad (a \geq 0)$$

$$b^{\frac{9}{5}} = \sqrt[5]{b^9} = b \sqrt[5]{b^4}$$



Степента  $a^{\frac{m}{n}}$  дефинирахме само при  $a \geq 0$ , тъй като при  $a < 0$  изразът  $\sqrt[n]{a^m}$  невинаги има смисъл. Например  $\sqrt[4]{(-2)^3}$  няма смисъл.

Степента  $a^{\frac{m}{n}}$  може да се дефинира като  $\sqrt[n]{a^m}$  и когато  $a < 0$  само ако  $n$  е нечетно число.

### Степен с отрицателен дробен показател

Като имаме предвид, че при  $a > 0, n \in \mathbb{N}$   $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ , понятието **степен с отрицателен дробен показател** дефинираме така:

**0**

Ако  $a > 0$  и  $m$  и  $n \geq 2$  са естествени числа, то  $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$ .

Тъй като  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$  при  $a > 0$  и  $m, n \in \mathbb{N}$ , то

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}.$$

Като вземем предвид, че  $a^{-\frac{m}{n}} = (a^{-1})^{\frac{m}{n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}}$ , то повдигането на числото  $a > 0$  на степен отрицателно рационално число  $-\frac{m}{n}$  се свежда до повдигане на реципрочното му число  $\frac{1}{a}$  на степен положителното рационално число  $\frac{m}{n}$ .

### ПРИМЕРИ

$$\begin{aligned} 8^{-\frac{2}{3}} &= \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{1000}\right)^{-\frac{1}{3}} = 1000^{\frac{1}{3}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \sqrt[3]{1000} = \\ &= \frac{1}{4} = \frac{3}{2} = 10 \end{aligned}$$

Като се използва свойството на коренуването и степенуването с цял показател, може да се докаже, че и за степен с рационален показател при  $a > 0, b > 0, x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}$  са в сила следните свойства:

<b>1.</b> $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	<b>6.</b> $a^0 = 1$
<b>2.</b> $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	<b>7.</b> $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
<b>3.</b> $(a^x)^y = a^{xy}$	<b>8.</b> $a^x > 0$
<b>4.</b> $(ab)^x = a^x \cdot b^x$	<b>9.</b> Ако $a > 1$ и $x < y$ , то $a^x < a^y$ . Ако $0 < a < 1$ и $x < y$ , то $a^x > a^y$ .
<b>5.</b> $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$	

Ще докажем част от тези свойства.

**!**

За всяко  $a > 0$  и всеки две рационални числа  $x$  и  $y$  е в сила равенството  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ .

#### Доказателство:

Нека  $x = \frac{p}{q}$  и  $y = \frac{m}{n}$  ( $p, m, q, n$  – цели числа,  $q \geq 2, n \geq 2$ ).

Като използваме определението за степен с рационален показател, свойствата на степените с цял показател и свойствата на корените, получаваме

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= a^{\frac{p}{q} + \frac{m}{n}} = a^{\frac{pn+qm}{qn}} = \sqrt[qn]{a^{pn+qm}} = \sqrt[qn]{a^{pn} \cdot a^{qm}} = \\ &= \sqrt[qn]{a^{pn}} \cdot \sqrt[qn]{a^{qm}} = \sqrt[q]{a^p} \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{m}{n}} = a^x \cdot a^y. \end{aligned}$$



Ако  $x$  е рационално число и  $a > 0$ , то  $a^x > 0$ .

**Доказателство:**

- Ако  $x$  е естествено число, то  $a^x = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{x \text{ ПЪТИ}} > 0$ .
- Ако  $x = 0$ , то  $a^x = a^0 = 1 > 0$ .
- Ако  $x = \frac{p}{q}$ , където  $p$  и  $q \geq 2$  са естествени числа, то  $a^x = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} > 0$ .
- Ако  $x = -y$ , където  $y$  е положително рационално число, то  $a^x = a^{-y} = \frac{1}{a^y} > 0$ .

Ще покажем верността на свойство (9) със следните примери:

**ПРИМЕРИ**

$$a = \frac{1}{3} < 1$$

$$\text{От } 2 < 3 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 > \left(\frac{1}{3}\right)^3,$$

$$\text{защото } \frac{1}{9} > \frac{1}{27}.$$

$$a = 5 > 1$$

$$\text{От } 2 < 3 \Rightarrow 5^2 < 5^3,$$

$$\text{защото } 25 < 125.$$

$$a = 3 > 1$$

$$\text{От } -3 < -2 \Rightarrow 3^{-3} < 3^{-2},$$

$$\text{защото } \frac{1}{27} < \frac{1}{9}.$$

**ЗАДАЧА 1** Пресметнете:

$$\text{а) } 81^{\frac{1}{4}};$$

$$\text{б) } \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}};$$

$$\text{в) } \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}.$$

**Решение:**

$$\begin{aligned} \text{а) } 81^{\frac{1}{4}} &= \sqrt[4]{81} = \\ &= \sqrt[4]{3^4} = \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} &= \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \\ &= \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} &= 8^{\frac{2}{3}} = \\ &= \sqrt[3]{8^2} = \\ &= \sqrt[3]{64} = \\ &= \sqrt[3]{4^3} = \\ &= 4 \end{aligned}$$

**ЗАДАЧА 2** Извършете означените действия:

$$\text{а) } 16^{\frac{3}{4}} \cdot 25^{\frac{1}{2}};$$

$$\text{б) } \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}};$$

$$\text{в) } 243^{-\frac{1}{5}} : 2^{-\frac{1}{2}}.$$

**Решение:**

$$\begin{aligned} \text{а) } 16^{\frac{3}{4}} \cdot 25^{\frac{1}{2}} &= \\ &= (2^4)^{\frac{3}{4}} \cdot (5^2)^{\frac{1}{2}} = \\ &= 2^{4 \cdot \frac{3}{4}} \cdot 5^{2 \cdot \frac{1}{2}} = \\ &= 2^3 \cdot 5^1 = \\ &= 8 \cdot 5 = \\ &= 40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} &= \\ &= \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^{-\frac{1}{3}} = \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } 243^{-\frac{1}{5}} : 2^{-\frac{1}{2}} &= \\ &= (3^5)^{-\frac{1}{5}} : \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= 3^{-1} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

**ЗАДАЧА 3** Определете кое от числата е по-голямо:

а)  $1,7^2$  и  $1,7^{-3}$ ;

б)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$  и  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$ .

**Решение:**

Прилагаме свойство (9) и получаваме:

а)  $a = 1,7 > 1$

От  $2 > -3 \Rightarrow 1,7^2 > 1,7^{-3}$ .

б)  $a = \frac{1}{2} < 1$ .

От  $-4 > -5 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$ .

**ЗАДАЧА 4** Запишете изразите:

а)  $\frac{1}{a} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{3}{4}}$  ( $a > 0$ ) с корен;

б)  $\sqrt{2\sqrt{2}}$  със степен.

**Решение:**

а)  $\frac{1}{a} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{3}{4}} = a^{-1} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{3}{4}} =$   
 $= a^{-1+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$

б)  $\sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2^{1+\frac{1}{2}}} =$   
 $= \sqrt{2^{\frac{3}{2}}} = \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{4}}$

**ЗАДАЧА 5**

Опростете израза  $A = \frac{\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{-6} \cdot \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{-12}}{a^{-4}}$  при  $a > 0$  и пресметнете стойността му, ако:

а)  $a = \frac{1}{2}$ ;

б)  $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

**Решение:**

$$A = \frac{\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{-6} \cdot \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{-12}}{a^{-4}} = \frac{a^{\frac{2}{3} \cdot (-6)} \cdot a^{\frac{1}{3} \cdot (-12)}}{a^{-4}} = \frac{a^{-4} \cdot a^{-4}}{a^{-4}} = a^{-4}$$

а) При  $a = \frac{1}{2}$

$$A = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 2^4 = 16.$$

б) При  $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$A = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)^4 = (\sqrt{3})^4 = 9.$$

**ЗАДАЧИ**

Пресметнете:

1.  $16^{-\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{125}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$ ;

2.  $\left(\sqrt[4]{0,001}\right)^{-4} - \left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{3}{2}}$ .

Представете със степен:

3.  $7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{-\frac{5}{6}} \cdot 7^{\frac{5}{2}}$ ;

4.  $\frac{5^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{-1}}{5^{-\frac{2}{3}}}$ .

Опростете изразите и запишете резултатите с корени:

5.  $A = \frac{2}{a} \cdot \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot a^{\frac{3}{4}}$ ,  $a > 0$ ;

6.  $B = \frac{\left(x^{-\frac{1}{3}} \cdot y^{-\frac{1}{2}}\right)^3}{x^{-\frac{3}{2}} \cdot y^2}$ ,  $x > 0$ ,  $y > 0$ .

Запишете със степени изразите:

7.  $\sqrt[4]{3\sqrt{3}}$ ;

8.  $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ .

Сравнете числата:

9.  $4^{1,2}$  и  $4^3$ ;

10.  $\left(\frac{1}{3}\right)^2$  и  $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ ;

11.  $0,5^{0,3}$  и  $0,5^3$ ;

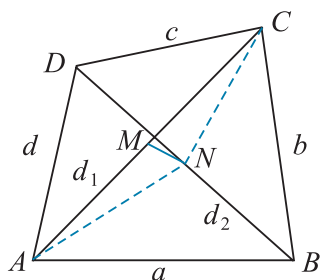
12.  $3^{-\frac{1}{2}}$  и  $3^{-\frac{1}{3}}$ .

## РЕШАВАНЕ НА ЧЕТИРИЪГЪЛНИК. УПРАЖНЕНИЕ

### ЗАДАЧА 1

Докажете, че за всеки изпъкнал четириъгълник е изпълнено твърдението  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = d_1^2 + d_2^2 + 4MN^2$ , където  $a, b, c$  и  $d$  са страните,  $d_1$  и  $d_2$  – диагоналите, а  $M$  и  $N$  – средите на диагоналите на четириъгълника.

**Доказателство:**



- От формулите за медианите в триъгълника получихме:  
за  $\triangle ANC$   $4MN^2 = 2(AN^2 + CN^2) - d_1^2$ ,  
за  $\triangle ABD$   $4AN^2 = 2(a^2 + d^2) - d_2^2$ ,  
за  $\triangle BDC$   $4CN^2 = 2(b^2 + c^2) - d_2^2$ .
- Събираме почленно второто и третото равенство и получаваме  
 $4(AN^2 + CN^2) = 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 2d_2^2$   
 $2(AN^2 + CN^2) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - d_2^2$ .
- Заместваме в първото равенство и получаваме  
 $4MN^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - d_2^2 - d_1^2$ , т.е.  
 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = d_1^2 + d_2^2 + 4MN^2$ .

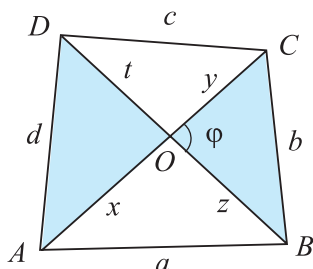


Ако четириъгълникът е успоредник,  $c = a$ ,  $d = b$ ,  $MN = 0$  и от Задача 1 получаваме  $2a^2 + 2b^2 = d_1^2 + d_2^2$ .

### ЗАДАЧА 2

За произволен четириъгълник  $ABCD$  са въведени следните означения:  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $CD = c$ ,  $DA = d$ ,  $AC = d_1$ ,  $BD = d_2$  и  $\sphericalangle BOC = \varphi$ , където  $O$  е пресечна точка на диагоналите. Докажете, че  $(a^2 + c^2) - (b^2 + d^2) = 2d_1d_2 \cos \varphi$ .

**Доказателство:**



- Означаваме  $OA = x$ ,  $OC = y$ ,  $OB = z$ ,  $OD = t$ .
- За  $\triangle OAB$ ,  $\triangle OBC$ ,  $\triangle OCD$  и  $\triangle ODA$  прилагаме косинусовата теорема и получаваме  
 $a^2 = x^2 + z^2 - 2xz \cos(180^\circ - \varphi) = x^2 + z^2 + 2xz \cos \varphi$   
 $b^2 = y^2 + z^2 - 2yz \cos \varphi$   
 $c^2 = y^2 + t^2 - 2yt \cos(180^\circ - \varphi) = y^2 + t^2 + 2yt \cos \varphi$   
 $d^2 = t^2 + x^2 - 2tx \cos \varphi$ .
- От сбора на първото и третото равенство изваждаме сбора на второто и четвъртото равенство и получаваме  
 $(a^2 + c^2) - (b^2 + d^2) =$   
 $= 2xz \cos \varphi + 2yt \cos \varphi + 2yz \cos \varphi + 2tx \cos \varphi =$   
 $= 2(\underline{xz} + \underline{yt} + \underline{yz} + \underline{tx}) \cos \varphi =$   
 $= 2((x + y)z + (x + y)t) \cos \varphi =$   
 $= 2(x + y)(z + t) \cos \varphi = 2d_1d_2 \cos \varphi$   
 $\Rightarrow (a^2 + c^2) - (b^2 + d^2) = 2d_1d_2 \cos \varphi$ .



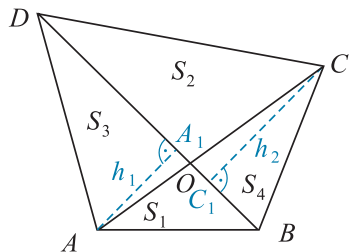
#### Следствие от Задача 2

Диагоналите на един четириъгълник са взаимноперпендикулярни тогава и само тогава, когато сборът от квадратите на две негови срещуположни страни е равен на сбора от квадратите на другите две срещуположни страни.

### ЗАДАЧА 3

Диагоналите  $AC$  и  $BD$  на четириъгълника  $ABCD$  се пресичат в точка  $O$  и разделят четириъгълника  $ABCD$  на четири триъгълника –  $\triangle OAB$ ,  $\triangle OCD$ ,  $\triangle OAD$  и  $\triangle OBC$ , с лица съответно  $S_1, S_2, S_3, S_4$ . Докажете, че  $S_1 \cdot S_2 = S_3 \cdot S_4$ .

**Доказателство:**



**1.**  $\triangle OAB$  и  $\triangle OAD$  имат общ връх  $A$  и основите им  $OB$  и  $OD$  лежат на една права ( $AA_1 \perp BD$ ,  $AA_1 = h_1$ )

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_3} = \frac{OB \cdot \frac{h_1}{2}}{OD \cdot \frac{h_1}{2}} = \frac{OB}{OD}.$$

**2.**  $\triangle OBC$  и  $\triangle ODC$  имат общ връх  $C$  и основите им  $OB$  и  $OD$  лежат на една права ( $CC_1 \perp BD$ ,  $CC_1 = h_2$ )

$$\Rightarrow \frac{S_4}{S_2} = \frac{OB \cdot \frac{h_2}{2}}{OD \cdot \frac{h_2}{2}} = \frac{OB}{OD}.$$

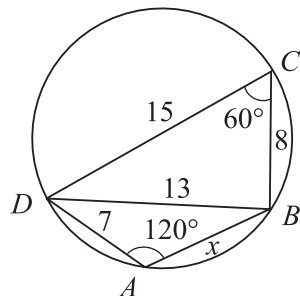
От **(1)** и **(2)**  $\Rightarrow \frac{S_1}{S_3} = \frac{S_4}{S_2} \Rightarrow S_1 \cdot S_2 = S_3 \cdot S_4$ .

### ЗАДАЧА 4

Четириъгълникът  $ABCD$  е вписан в окръжност. Ако  $AD = 7$ ,  $DC = 15$ ,  $BC = 8$  и  $\sphericalangle BCD = 60^\circ$ , намерете:

- а)  $BD$ ;      б)  $P$ ;      в)  $S$ ;      г)  $R$ .

**Решение:**



а) За  $\triangle BCD$  прилагаме косинусовата теорема.

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cos 60^\circ$$

$$BD^2 = 64 + 225 - 2 \cdot 8 \cdot 15 \cdot \frac{1}{2} = 289 - 120 = 169$$

$$BD = 13$$

б) За  $\triangle ABD$  прилагаме косинусовата теорема.

$$\sphericalangle BAD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ, AB = x$$

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos 120^\circ$$

$$169 = x^2 + 49 + 2x \cdot 7 \cdot \frac{1}{2}$$

$$x^2 + 7x - 120 = 0$$

$$x_1 = -15, x_2 = 8, x > 0 \Rightarrow AB = 8$$

$$P = AB + BC + CD + DA = 8 + 8 + 15 + 7 = 38$$

в) Лицето  $S$  на четириъгълника ще намерим по два начина.

**I начин:**  $S = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD \sin 120^\circ + \frac{1}{2} BC \cdot CD \sin 60^\circ =$

$$= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3} + 30\sqrt{3} = 44\sqrt{3}$$

**II начин:**  $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} =$

$$= \sqrt{(19-8) \cdot (19-8) \cdot (19-15) \cdot (19-7)} = \sqrt{11 \cdot 11 \cdot 4 \cdot 12} = 44\sqrt{3}$$

г) Окръжността, описана около четириъгълника  $ABCD$ , съвпада с окръжността, описана около  $\triangle BCD$ . За  $\triangle BCD$  прилагаме синусовата теорема.

$$\frac{BD}{\sin 60^\circ} = 2R \Rightarrow R = \frac{BD}{2 \sin 60^\circ} = \frac{13}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{13}{\sqrt{3}} = \frac{13\sqrt{3}}{3} \Rightarrow R = \frac{13\sqrt{3}}{3}$$

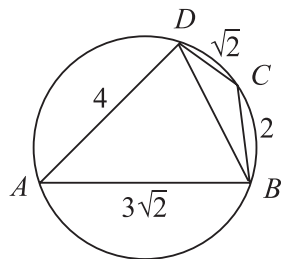


### ЗАДАЧА 5

Четириъгълникът  $ABCD$  е вписан в окръжност. Ако  $AB = 3\sqrt{2}$ ,  $AD = 4$ ,  $CD = \sqrt{2}$  и  $BC = 2$ , намерете:

- а)  $S$ ;                      б)  $\sphericalangle BAD$ ;                      в)  $BD$ ;                      г)  $R$ .

**Решение:**



а) За вписания четириъгълник  $ABCD$  прилагаме формулата

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

$$p = \frac{3\sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} + 4}{2} = 3 + 2\sqrt{2}$$

$$S = \sqrt{(3+2\sqrt{2}-3\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}-2)(3+2\sqrt{2}-\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}-4)}$$

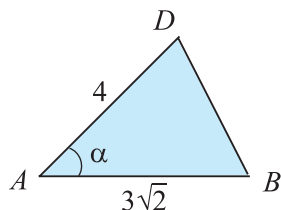
$$S = \sqrt{(3-\sqrt{2}) \cdot (2\sqrt{2}+1) \cdot (3+\sqrt{2}) \cdot (2\sqrt{2}-1)} =$$

$$= \sqrt{(3+\sqrt{2}) \cdot (3-\sqrt{2}) \cdot (2\sqrt{2}+1) \cdot (2\sqrt{2}-1)} =$$

$$= \sqrt{(3^2 - (\sqrt{2})^2) \cdot ((2\sqrt{2})^2 - 1^2)} =$$

$$= \sqrt{(9-2) \cdot (8-1)} = \sqrt{7 \cdot 7}$$

$$S = 7$$



б) Означаваме  $\sphericalangle BAD = \alpha \Rightarrow \sphericalangle BCD = 180^\circ - \alpha$ .

$$S = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} =$$

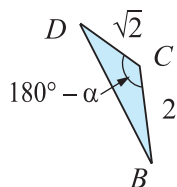
$$= \frac{1}{2} AB \cdot AD \sin \alpha + \frac{1}{2} BC \cdot CD \sin(180^\circ - \alpha) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 4 \sin \alpha + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \sin \alpha = 6\sqrt{2} \sin \alpha + \sqrt{2} \sin \alpha$$

$$S = 7\sqrt{2} \sin \alpha$$

$$7 = 7\sqrt{2} \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$



в) За  $\triangle ABD$  прилагаме косинусовата теорема.

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos 45^\circ =$$

$$= (3\sqrt{2})^2 + 4^2 - 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 18 + 16 - 24$$

$$BD^2 = 10$$

$$BD = \sqrt{10}$$

г) Окръжността, описана около четириъгълника  $ABCD$ , съвпада с окръжността, описана около  $\triangle ABD$ .

За  $\triangle ABD$  прилагаме синусовата теорема.

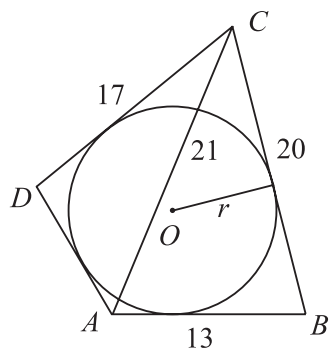
$$\frac{BD}{\sin \alpha} = 2R \Rightarrow R = \frac{BD}{2 \sin \alpha} = \frac{\sqrt{10}}{2 \cdot \sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{10}}{\frac{2 \cdot \sqrt{2}}{2}} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{5}$$

**ЗАДАЧА 6**

Около окръжност е описан четириъгълник  $ABCD$ . Ако  $AB = 13$ ,  $BC = 20$ ,  $CD = 17$  и  $AC = 21$ , намерете:

- а)  $AD$ ;                      б)  $P$ ;                      в)  $S$ ;                      г)  $r$ .



**Решение:**

а)  $ABCD$  – описан четириъгълник

$$\Rightarrow AB + CD = BC + AD$$

$$13 + 17 = 20 + AD$$

$$AD = 10$$

б)  $P = AB + BC + CD + DA = 13 + 20 + 17 + 10 = 60$

в) Лицето на  $ABCD$  е сбор от лицата на  $\triangle ABC$  и  $\triangle ACD$ , които намираме по Хероновата формула.

$$P_{\triangle ABC} = \frac{13 + 20 + 21}{2} = 27$$

$$S_1 = S_{\triangle ABC} = \sqrt{27 \cdot (27 - 13) \cdot (27 - 20) \cdot (27 - 21)} = \\ = \sqrt{27 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{3^3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3} = 9 \cdot 2 \cdot 7 = 126$$

$$P_{\triangle ACD} = \frac{21 + 17 + 10}{2} = 24$$

$$S_2 = S_{\triangle ACD} = \sqrt{24 \cdot (24 - 21) \cdot (24 - 17) \cdot (24 - 10)} = \\ = \sqrt{24 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 14} = \sqrt{4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 2} = 4 \cdot 3 \cdot 7 = 84$$

$$S = S_1 + S_2 = 126 + 84 = 210$$

г)  $ABCD$  – описан четириъгълник

$$\Rightarrow S = p \cdot r, \quad 210 = 30 \cdot r \Rightarrow r = 7$$

**ЗАДАЧИ**

- Четириъгълникът  $ABCD$  е вписан в окръжност. Намерете радиуса  $R$  на окръжността, ако  $AB = 3\sqrt{2}$ ,  $BC = 2$  и  $\sphericalangle ADC = 135^\circ$ .
- За четириъгълника  $ABCD$  е дадено, че  $AC \cdot BD = 24$ . Ако  $\sphericalangle CAB = 55^\circ$  и  $\sphericalangle ABD = 65^\circ$ , намерете лицето  $S$  на четириъгълника.
- Точките  $M$ ,  $N$ ,  $P$  и  $Q$  са средите съответно на страните  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  на четириъгълника  $ABCD$ . Ако  $MNPQ$  е правоъгълник с лице  $36 \text{ cm}^2$ , намерете лицето  $S$  на  $ABCD$ .
- Четириъгълникът  $ABCD$  със страни  $AD = 5$  и  $BC = 7$  е описан около окръжност с радиус  $r = 3$ . Намерете лицето  $S$  на четириъгълник.
- Четириъгълникът  $ABCD$  е вписан във окръжност. Ако  $AB = BC = 5$ ,  $CD = 8$  и  $\sphericalangle BAD = 120^\circ$ , намерете:
  - $BD$ ;
  - $P$ ;
  - $R$ ;
  - $S$ .
- Четириъгълникът  $ABCD$  е описан около окръжност. Пресечната точка на диагоналите му е  $O$ . Докажете, че  $R_1 + R_3 = R_2 + R_4$ , където  $R_1, R_2, R_3, R_4$  са радиусите на окръжностите, описани съответно около триъгълниците  $OAB, OBC, OCD, ODA$ .
- Четириъгълникът  $ABCD$  със страни  $AB = 19 \text{ cm}$ ,  $BC = 7 \text{ cm}$ ,  $CD = 15 \text{ cm}$  и  $AD = 21 \text{ cm}$  е вписан в окръжност. Правите  $AB$  и  $CD$  се пресичат в точка  $M$ . Намерете отношението на лицата на  $\triangle AMD$  и четириъгълника  $ABCD$ .
- Върху страните  $AB, BC, CD$  и  $DA$  на изпъкналия четириъгълник  $ABCD$  са взети съответно точки  $M, N, P$  и  $Q$  така, че  $AM : MB = BN : NC = CP : PD = DQ : QA = \frac{1}{2}$ . Намерете отношението на лицата на четириъгълниците  $MNPQ$  и  $ABCD$ .