

# СЪДЪРЖАНИЕ

## ВХОДНО НИВО

1. Тест с решения.....6
2. Входно ниво. Тест № 1 и Тест № 2.....10

## ТЕМА 1. ИРАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ. ИРАЦИОНАЛНИ УРАВНЕНИЯ

3. Действия с квадратни корени (преговор).....14
4. Ирационални изрази .....18
5. Преобразуване на ирационални изрази.....20
6. Ирационални уравнения с един квадратен радикал .....24
7. Ирационални уравнения с два квадратни радикала.....26
8. Ирационални уравнения. Упражнение.....28
9. Ирационални уравнения. Упражнение.....30
10. Ирационални уравнения, които се решават чрез полагане .....32
11. Решаване на ирационални уравнения с теорема за еквивалентност .....36
12. Обобщение на темата „Ирационални изрази. Ирационални уравнения“ .....38
13. Тестове върху темата „Ирационални изрази. Ирационални уравнения“ .....43

## ТЕМА 2. ПРОГРЕСИИ

14. Числови редици. Начин за задаване на числови редици.....46
15. Аритметична прогресия. Формула за общия член на аритметична прогресия .....50
16. Свойства на аритметичната прогресия .....52
17. Формула за сбора от първите  $n$  члена на аритметична прогресия.....54
18. Геометрична прогресия. Формула за общия член на геометрична прогресия .....56

19. Свойства на геометричната прогресия .....58
20. Формула за сбора от първите  $n$  члена на геометрична прогресия .....60
21. Комбинирани задачи от аритметична и геометрична прогресия.....62
22. Проста лихва. Сложна лихва.....66
23. Практически задачи, свързани със сложна лихва .....70
24. Обобщение на темата „Прогресии“.....72
25. Тестове върху темата „Прогресии“.....77

## ТЕМА 3. СТАТИСТИКА И ОБРАБОТКА НА ДАННИ

26. Описателна статистика .....80
27. Централни тенденции – мода, медиана и средно аритметично .....84
28. Петчислено представяне на данни.....88
29. Практически задачи. Упражнение .....92

## ТЕМА 4. РЕШАВАНЕ НА ТРИЪГЪЛНИК

30. Тригонометричните функции синус, косинус, тангенс и котангенс в интервала  $[0^\circ; 180^\circ]$ .....98
31. Основни тригонометрични тъждества в интервала  $[0^\circ; 180^\circ]$ .....100
32. Таблица за стойностите на тригонометричните функции от някои специални ъгли в интервала  $[0^\circ; 180^\circ]$ .....102
33. Пресмятане на тригонометрични изрази. Упражнение .....104
34. Синусова теорема.....106
35. Решаване на произволен триъгълник с помощта на синусова теорема – основни задачи .....108
36. Косинусова теорема .....112
37. Решаване на произволен триъгълник с помощта на косинусова теорема – основни задачи .....114

38. Формули за медиани на триъгълник ..	116
39. Формули за ъглополовящи на триъгълник .....	118
40. Формули за лице на триъгълник.....	120
41. Формули за лице на триъгълник. Упражнение.....	124
42. Обобщение на темата „Решаване на триъгълник“ .....	126
43. Тестове върху темата „Решаване на триъгълник“ .....	129

### **ТЕМА 5. ЕЛЕМЕНТИ ОТ СТЕРЕОМЕТРИЯТА**

44. Прави и равнини в пространството. Взаимно положение на две прави и ъгъл между тях .....	132
45. Взаимно положение на права и равнина. Перпендикулярност на права и равнина .....	138
46. Ортогонално проектиране. Ъгъл между права и равнина.....	142
47. Взаимно положение на две равнини. Ъгъл между две равнини .....	146
48. Права призма .....	150
49. Пирамида .....	154
50. Пирамида. Упражнение .....	158
51. Прав кръгов цилиндър .....	164
52. Прав кръгов конус .....	168
53. Сфера и кълбо .....	172
54. Обобщение на темата „Елементи от стереометрията“ .....	176
55. Тестове върху темата „Елементи от стереометрията“ .....	181

### **ТЕМА 6. ПРЕГОВОР И ОБОБЩЕНИЕ ПО ВЪЗЛОВИ ТЕМИ**

56. Рационални и ирационални уравнения .....	184
57. Системи уравнения .....	190
58. Неравенства. Системи неравенства ....	196
59. Функции .....	202
60. Прогресии .....	208
61. Подобни триъгълници. Метрични зависимости между отсечки.....	214
62. Тригонометрични функции .....	220
63. Решаване на триъгълник.....	226
64. Вероятности и статистика .....	232

### **ИЗХОДНО НИВО**

65. Тест с решения.....	240
66. Изходно ниво. Тест № 1 и Тест № 2 ...	245

<b>ОТГОВОРИ</b> .....	247
-----------------------	-----

## ИРАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

**0** Алгебричен израз, който съдържа радикал (корен), се нарича **иррационален**.

Примери:  $2\sqrt{3} + 1$ ;  $2a\sqrt{b} - \sqrt{a}$ ;  $5a\sqrt{a-b}$ ;  $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}$ .

**0** Един радикал е в **нормален вид**, ако подкоренната му величина:

- не съдържа знаменател;
- няма множители, които могат да се изнесат пред радикала.

Примери:  $a\sqrt{a}$ ;  $3\sqrt{2bc}$ ;  $\frac{1}{3}\sqrt{x^2 - y^2}$ .

**0** **Коефициент** на един радикал се нарича множителят пред знака на радикала.

Пример:  $5a\sqrt{a-b}$  има коефициент  $5a$ .

**ЗАДАЧА 1** Приведете в нормален вид радикалите:

а)  $\sqrt{125x^3}$ ,  $x \geq 0$ ;

б)  $\sqrt{27a^5}$ ,  $a \geq 0$ ;

в)  $\sqrt{8b^8}$ .

**Решение:**

$$\begin{aligned} \text{а) } \sqrt{125x^3} &= \\ &= \sqrt{5^2 \cdot 5 \cdot x^2 \cdot x} = \\ &= 5x\sqrt{5x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \sqrt{27a^5} &= \\ &= \sqrt{3^2 \cdot 3 \cdot a^4 \cdot a} = \\ &= 3a^2\sqrt{3a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \sqrt{8b^8} &= \\ &= \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot (b^4)^2} = \\ &= 2b^4\sqrt{2} \end{aligned}$$

**0** Радикали, които в нормалния си вид имат еднакви подкоренни величини, се наричат **подобни радикали**.

Примери:  $3\sqrt{10}$  и  $2\sqrt{10}$ ;  $2a\sqrt{a+b}$  и  $\sqrt{a+b}$ .

**ЗАДАЧА 2** Подобни ли са радикалите:

а)  $\sqrt{27}$  и  $\sqrt{75}$ ;

б)  $\sqrt{8x^3}$  и  $\sqrt{18x}$ ,  $x \geq 0$ ?

**Решение:**

Привеждаме радикалите в нормален вид.

$$\begin{aligned} \text{а) } \sqrt{27} &= \sqrt{3^2 \cdot 3} = 3\sqrt{3} \\ \sqrt{75} &= \sqrt{5^2 \cdot 3} = 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \sqrt{8x^3} &= \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot x^2 \cdot x} = 2x\sqrt{2x} \\ \sqrt{18x} &= \sqrt{3^2 \cdot 2x} = 3\sqrt{2x} \end{aligned}$$

**Отг.** Подобни са.

**Отг.** Подобни са.

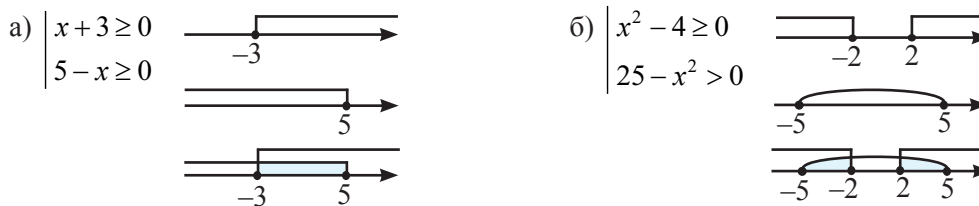
**0** **Допустими стойности** (ДС) на ирационален израз се нарича множеството от всички стойности на променливите, за които подкоренните величини са неотрицателни и знаменателите са различни от нула.

**ЗАДАЧА 3** Намерете допустимите стойности на  $x$  в следните ирационални изрази:

а)  $A = \sqrt{x+3} + \sqrt{5-x}$ ;                      б)  $B = \sqrt{x^2-4} + \frac{3x}{\sqrt{25-x^2}}$ .

**Решение:**

Допустимите стойности на ирационалните изрази се определят от условията:



**Отг.** ДС:  $x \in [-3; 5]$

**Отг.** ДС:  $x \in (-5; -2] \cup [2; 5)$

**ЗАДАЧА 4** Пресметнете числената стойност на израза  $C = 3x + \sqrt{x^2 + 5x + 4}$  за:

а)  $x = 0$ ;                      б)  $x = -1$ ;                      в)  $x = -2$ .

**Решение:**

а) При  $x = 0$                       б) При  $x = -1$                       в) При  $x = -2$   
 $C = 3 \cdot 0 + \sqrt{0^2 + 5 \cdot 0 + 4} = 0 + 2 = 2.$                        $C = 3 \cdot (-1) + \sqrt{(-1)^2 + 5 \cdot (-1) + 4} = -3 + \sqrt{1 - 5 + 4} = -3.$                        $C = 3 \cdot (-2) + \sqrt{(-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 4} = -6 + \sqrt{4 - 10 + 4} = -6 + \sqrt{-2}.$   
 Изразът няма смисъл.

**ЗАДАЧА 5** Пресметнете числената стойност на израза  $D = \sqrt{4x+9} + \sqrt{4-x}$  за:

а)  $x = 0$ ;                      б)  $x = 4$ ;                      в)  $x = -2$ .

**Решение:**

а) При  $x = 0$                       б) При  $x = 4$                       в) При  $x = -2$   
 $D = \sqrt{4 \cdot 0 + 9} + \sqrt{4 - 0} = \sqrt{9} + \sqrt{4} = 3 + 2 = 5.$                        $D = \sqrt{4 \cdot 4 + 9} + \sqrt{4 - 4} = \sqrt{25} + \sqrt{0} = 5 + 0 = 5.$                        $D = \sqrt{4 \cdot (-2) + 9} + \sqrt{4 - (-2)} = \sqrt{-8 + 9} + \sqrt{4 + 2} = \sqrt{1} + \sqrt{6} = 1 + \sqrt{6}.$

**ЗАДАЧИ** Приведете в нормален вид радикалите:

1.  $\sqrt{96}$ ;                      2.  $\sqrt{343}$ ;                      3.  $\sqrt{12a^5}$ ,  $a \geq 0$ .

Подобни ли са радикалите:

4.  $2\sqrt{5}$  и  $3\sqrt{20}$ ;                      5.  $3\sqrt{63}$  и  $5\sqrt{28}$ ;                      6.  $\sqrt{50x^3}$  и  $\sqrt{18x}$ ,  $x \geq 0$ .

Намерете допустимите стойности на  $x$  в следните изрази:

7.  $A = \sqrt{x+9} - \sqrt{4-x}$ ;                      8.  $A = \sqrt{x^2+3x} - \sqrt{36-x^2}$ ;                      9.  $A = \sqrt{4-x^2} + \frac{5}{\sqrt{x^2-x}}$ .

10. Пресметнете числената стойност на израза

$A = 3x - 2 + \sqrt{x^2 + 5x - 6}$  при:

а)  $x = -6$ ;                      б)  $x = 1$ ;                      в)  $x = 3$ .

11. Пресметнете числената стойност на израза

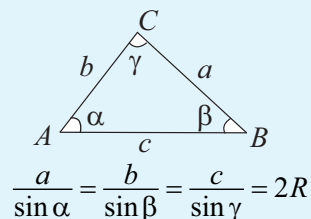
$B = \sqrt{2x+3} + \sqrt{4-x}$  при:

а)  $x = 3$ ;                      б)  $x = -1$ ;                      в)  $x = 4$ .

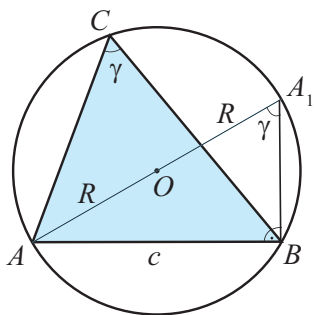
Т

**Синусова теорема**

За всеки триъгълник отношението на коя да е страна и синуса на срещулежащия ѝ ъгъл е равно на диаметъра на описаната около триъгълника окръжност.

**Доказателство:**

Нека  $\triangle ABC$  е даденият триъгълник и  $O$  е центърът на описаната около него окръжност.  $\triangle ABC$  може да бъде остроъгълен, правоъгълен или тъпоъгълен.

**I случай:**  $\triangle ABC$  ( $\gamma < 90^\circ$ )

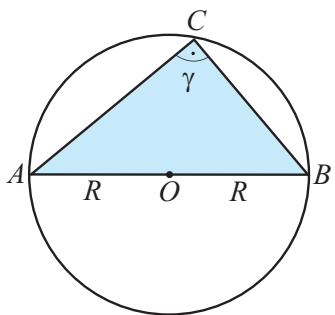
Построяваме диаметъра  $AA_1 = 2R$ .

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle AA_1B = \frac{1}{2} \widehat{AB} = \gamma$$

$$\sphericalangle ABA_1 = 90^\circ$$

В  $\triangle ABA_1$  ( $\sphericalangle ABA_1 = 90^\circ$ ) намираме

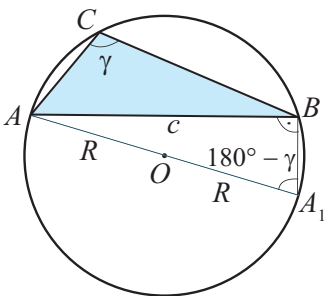
$$\sin \gamma = \frac{AB}{AA_1} = \frac{c}{2R}, \text{ т.е. } \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

**II случай:**  $\triangle ABC$  ( $\gamma = 90^\circ$ )

$\triangle ABC$  е правоъгълен с хипотенуза  $AB = c = 2R$  и  $\sin \gamma = \sin 90^\circ = 1$ .

От  $\frac{c}{2R} = 1$  и  $\sin \gamma = \sin 90^\circ = 1$  получаваме

$$\sin \gamma = \frac{c}{2R}, \text{ т.е. } \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

**III случай:**  $\triangle ABC$  ( $\gamma > 90^\circ$ )

Построяваме диаметъра  $AA_1 = 2R$ .

От свойството на вписания четириъгълник  $AA_1BC$  следва, че  $\sphericalangle AA_1B = 180^\circ - \gamma$ .

От  $\triangle AA_1B$  ( $\sphericalangle ABA_1 = 90^\circ$ ) намираме

$$\sin(180^\circ - \gamma) = \frac{AB}{AA_1} = \frac{c}{2R}$$

$$\sin(180^\circ - \gamma) = \sin \gamma$$

$$\Rightarrow \sin \gamma = \frac{c}{2R}, \text{ т.е. } \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

Аналогично доказваме, че  $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$  и  $\frac{b}{\sin \beta} = 2R$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R, \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

**ЗАДАЧА 1** В  $\triangle ABC$  са дадени  $AB = 20$  cm,  $\alpha = 45^\circ$  и  $\gamma = 30^\circ$ . Намерете страната  $BC$  и радиуса на описаната около  $\triangle ABC$  окръжност.



**Решение:**

$$1. \frac{c}{\sin \gamma} = 2R \Rightarrow \frac{20}{\sin 30^\circ} = \frac{20}{\frac{1}{2}} = 40 = 2R$$

$$\Rightarrow R = 20 \text{ cm}$$

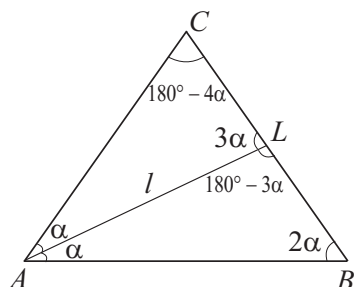
$$2. \frac{a}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\Rightarrow a = 2R \sin \alpha = 2 \cdot 20 \cdot \sin 45^\circ = 2 \cdot 20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 20\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow BC = a = 20\sqrt{2} \text{ cm}$$

**ЗАДАЧА 2** Ъгълът при основата на равнобедрен триъгълник е  $2\alpha$ , а ъглополовящата на този ъгъл е  $l$ . Намерете: а) основата на триъгълника; б) бедрото на триъгълника.

**Решение:**



а) В  $\triangle ABL$  намираме

$$\sphericalangle ALB = 180^\circ - 3\alpha, \sin(180^\circ - 3\alpha) = \sin 3\alpha.$$

За  $\triangle ABL$  прилагаме синусовата теорема и получаваме

$$\frac{AB}{\sin(180^\circ - 3\alpha)} = \frac{AL}{\sin 2\alpha} \Rightarrow \frac{AB}{\sin 3\alpha} = \frac{l}{\sin 2\alpha}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{l \sin 3\alpha}{\sin 2\alpha}.$$

б) В  $\triangle ABC$  намираме

$$\sphericalangle ACB = 180^\circ - 4\alpha, \sin(180^\circ - 4\alpha) = \sin 4\alpha.$$

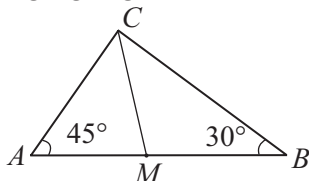
За  $\triangle ACL$  прилагаме синусовата теорема и получаваме

$$\frac{AC}{\sin 3\alpha} = \frac{AL}{\sin(180^\circ - 4\alpha)} \Rightarrow \frac{AC}{\sin 3\alpha} = \frac{l}{\sin 4\alpha}$$

$$\Rightarrow AC = \frac{l \sin 3\alpha}{\sin 4\alpha}.$$

**ЗАДАЧА 3** В  $\triangle ABC$  са дадени  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ . Върху страната  $AB$  е избрана точка  $M$ . Радиусът на описаната около  $\triangle AMC$  окръжност е  $R$ . Намерете радиуса  $R_1$  на описаната около  $\triangle BMC$  окръжност.

**Решение:**



1. За  $\triangle AMC$  прилагаме синусовата теорема

$$CM = 2R \sin 45^\circ = 2R \frac{\sqrt{2}}{2} = R\sqrt{2}$$

2. За  $\triangle BMC$  прилагаме синусовата теорема

$$CM = 2R_1 \sin 30^\circ \Rightarrow R\sqrt{2} = 2R_1 \frac{1}{2} \Rightarrow R_1 = R\sqrt{2}$$

## ЗАДАЧИ

- За  $\triangle ABC$  са дадени  $AB = 30$  cm и  $\gamma = 45^\circ$ . Намерете радиуса на описаната около триъгълника окръжност.
- Радиусът на описаната около  $\triangle ABC$  окръжност е  $R = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ . Намерете ъгъл  $\alpha$ , ако  $BC = 2$  cm.
- В  $\triangle ABC$   $\alpha : \beta : \gamma = 1 : 3 : 8$ . Намерете страната  $AC$ , ако  $AB = 10$  cm.
- В окръжност с радиус 7 cm дъгата  $\widehat{AB} = 120^\circ$ . Намерете хордата  $AB$ .
- Равнобедрен  $\triangle ABC$  с ъгъл при върха  $30^\circ$  има основа  $AB = 12$  cm. Върху бедрото  $BC$  е взета точка  $D$  така, че  $\sphericalangle CAD : \sphericalangle DAB = 1 : 4$ . Намерете радиуса на описаната около  $\triangle ABD$  окръжност.
- Основата на равнобедрен триъгълник е 10 cm, а ъгълът при основата му е  $2\alpha$ . Намерете ъглополовящата на ъгъла при основата.
- В  $\triangle ABC$  са дадени  $AB = 12$  cm и  $\gamma = 60^\circ$ . Намерете радиуса на описаната около  $\triangle ABL$  окръжност, където  $L$  е пресечната точка на ъглополовящите в  $\triangle ABC$ .