СЪДЪРЖАНИЕ

4. ИРАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

О Алгебричен израз, който съдържа радикал (корен), се нарича **ирационален**.

Примери: $2\sqrt{3}+1;\ 2a\sqrt{b}-\sqrt{a};\ 5a\sqrt{a-b};\ \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}.$

О Един радикал е в **нормален вид**, ако подкоренната му величина:
- не съдържа знаменател;
- няма множители, които могат да се изнесат пред радикала.

Примери: $a\sqrt{a};\ 3\sqrt{2bc};\ \frac{1}{3}\sqrt{x^2-y^2}$.

О **Коефициент** на един радикал се нарича множителят пред знака на радикала.

Пример: $5a\sqrt{a-b}$ има коефициент $5a$.

ЗАДАЧА 1 Приведете в нормален вид радикалите:

а) $\sqrt{125x^3},\ x\geq 0;$ б) $\sqrt{27a^5},\ a\geq 0;$ в) $\sqrt{8b^8}.$

Решение:

а) $\sqrt{125x^3}=$

$=\sqrt{5^2.5.x^2.x}=$

$=5x\sqrt{5x}$

б) $\sqrt{27a^5}=$

$=\sqrt{3^2.3.a^4.a}=$

$=3a^2\sqrt{3a}$

в) $\sqrt{8b^8}=$

$=\sqrt{2^2.2.(b^4)^2}=$

$=2b^4\sqrt{2}$

О Радикали, които в нормалния си вид имат еднакви подкоренни величини, се наричат **подобни радикали.**

Примери: $3\sqrt{10}$ и $2\sqrt{10};\ 2a\sqrt{a+b}$ и $\sqrt{a+b}.$

ЗАДАЧА 2 Подобни ли са радикалите:

а) $\sqrt{27}$ и $\sqrt{75};$ б) $\sqrt{8x^3}$ и $\sqrt{18x},\ x\geq 0?$

Решение:
Привеждаме радикалите в нормален вид.

а) $\sqrt{27}=\sqrt{3^2.3}=3\sqrt{3}$

$\sqrt{75}=\sqrt{5^2.3}=5\sqrt{3}$

Отг. Подобни са.

б) $\sqrt{8x^3}=\sqrt{2^2.2.x^2.x}=2x\sqrt{2x}$

$\sqrt{18x}=\sqrt{3^2.2x}=3\sqrt{2x}$

Отг. Подобни са.

О **Допустими стойности** (ДС) на ирационален израз се нарича множеството от всички стойности на променливите, за които подкоренните величини са неотрицателни и знаменателите са различни от нула.

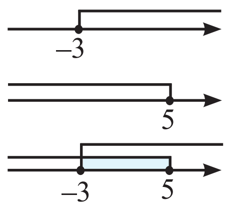
ЗАДАЧА 3 Намерете допустимите стойности на x в следните ирационални изрази:

а) $A=\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}$; б) $B=\sqrt{x^2-4}+\dfrac{3x}{\sqrt{25-x^2}}$.

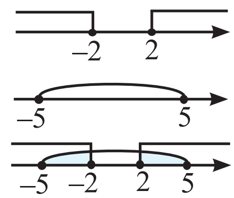
Решение:

Допустимите стойности на ирационалните изрази се определят от условията:

а) $\left| \begin{array}{l} x+3\geq 0 \\ 5-x\geq 0 \end{array} \right.$



б) $\left| \begin{array}{l} x^2-4\geq 0 \\ 25-x^2>0 \end{array} \right.$



Отг. ДС: $x\in[-3;5]$ **Отг.** ДС: $x\in(-5;-2]\cup[2;5)$

ЗАДАЧА 4 Пресметнете числената стойност на израза $C=3x+\sqrt{x^2+5x+4}$ за:

а) $x=0$; б) $x=-1$; в) $x=-2$.

Решение:

а) При $x=0$

$C=3.0+\sqrt{0^2+5.0+4}=$

$=0+2=2.$

б) При $x=-1$

$C=3.(-1)+\sqrt{(-1)^2+5.(-1)+4}=$

$=-3+\sqrt{1-5+4}=-3.$

в) При $x=-2$

$C=3.(-2)+\sqrt{(-2)^2+5.(-2)+4}=$

$=-6+\sqrt{4-10+4}=-6+\sqrt{-2}.$

Изразът няма смисъл.

ЗАДАЧА 5 Пресметнете числената стойност на израза $D=\sqrt{4x+9}+\sqrt{4-x}$ за:

а) $x=0$; б) $x=4$; в) $x=-2$.

Решение:

а) При $x=0$

$D=\sqrt{4.0+9}+\sqrt{4-0}=$

$=\sqrt{9}+\sqrt{4}=$

$=3+2=5.$

б) При $x=4$

$D=\sqrt{4.4+9}+\sqrt{4-4}=$

$=\sqrt{25}+\sqrt{0}=$

$=5+0=5.$

в) При $x=-2$

$D=\sqrt{4.(-2)+9}+\sqrt{4-(-2)}=$

$=\sqrt{-8+9}+\sqrt{4+2}=$

$=\sqrt{1}+\sqrt{6}=1+\sqrt{6}.$

ЗАДАЧИ

Приведете в нормален вид радикалите:

1. $\sqrt{96}$; **2.** $\sqrt{343}$; **3.** $\sqrt{12a^5}$, $a\geq 0$.

Подобни ли са радикалите:

4. $2\sqrt{5}$ и $3\sqrt{20}$; **5.** $3\sqrt{63}$ и $5\sqrt{28}$; **6.** $\sqrt{50x^3}$ и $\sqrt{18x}$, $x\geq 0$.

Намерете допустимите стойности на x в следните изрази:

7. $A=\sqrt{x+9}-\sqrt{4-x}$; **8.** $A=\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{36-x^2}$; **9.** $A=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{5}{\sqrt{x^2-x}}$.

10. Пресметнете числената стойност на израза

$A=3x-2+\sqrt{x^2+5x-6}$ при:

а) $x=-6$; б) $x=1$; в) $x=3$.

11. Пресметнете числената стойност на израза

$B=\sqrt{2x+3}+\sqrt{4-x}$ при:

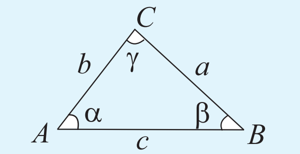
а) $x=3$; б) $x=-1$; в) $x=4$.

34. СИНУСОВА ТЕОРЕМА

Т

Синусова теорема

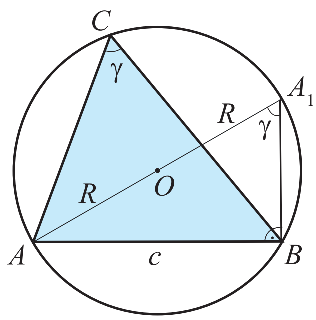
За всеки триъгълник отношението на коя да е страна и синуса на срещулежащия ѝ ъгъл е равно на диаметъра на описаната около триъгълника окръжност.



$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

Доказателство:

Нека $\triangle ABC$ е даденият триъгълник и O е центърът на описаната около него окръжност. $\triangle ABC$ може да бъде остроъгълен, правоъгълен или тъпоъгълен.



I случай: $\triangle ABC$ $(\gamma < 90°)$

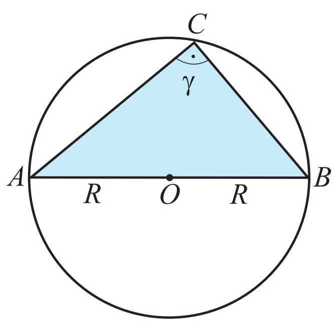
Построяваме диаметъра $AA_1 = 2R$.

$\sphericalangle ACB = \sphericalangle AA_1B = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB} = \gamma$

$\sphericalangle ABA_1 = 90°$

В $\triangle ABA_1$ $(\sphericalangle ABA_1 = 90°)$ намираме

$\sin\gamma = \frac{AB}{AA_1} = \frac{c}{2R}$, т.е. $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

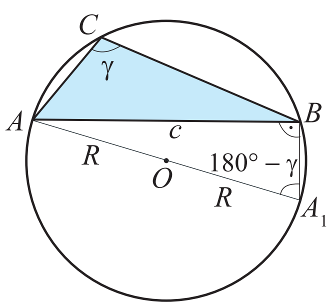


II случай: $\triangle ABC$ $(\gamma = 90°)$

$\triangle ABC$ е правоъгълен с хипотенуза $AB = c = 2R$ и $\sin\gamma = \sin 90° = 1$.

От $\frac{c}{2R} = 1$ и $\sin\gamma = \sin 90° = 1$ получаваме

$\sin\gamma = \frac{c}{2R}$, т.е. $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$.



III случай: $\triangle ABC$ $(\gamma > 90°)$

Построяваме диаметъра $AA_1 = 2R$.

От свойството на вписания четириъгълник AA_1BC следва, че $\sphericalangle AA_1B = 180° - \gamma$.

От $\triangle AA_1B$ $(\sphericalangle ABA_1 = 90°)$ намираме

$\sin(180° - \gamma) = \frac{AB}{AA_1} = \frac{c}{2R}$

$\sin(180° - \gamma) = \sin\gamma$

$\Rightarrow \sin\gamma = \frac{c}{2R}$, т.е. $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$.

Аналогично доказваме, че $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$ и $\frac{b}{\sin\beta} = 2R$

$\Rightarrow \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$, $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

ЗАДАЧА 1 В $\triangle ABC$ са дадени $AB = 20$ cm, $\alpha = 45°$ и $\gamma = 30°$. Намерете страната BC и радиуса на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

Решение:

1. $\dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R \Rightarrow \dfrac{20}{\sin 30°} = \dfrac{20}{\frac{1}{2}} = 40 = 2R$

$\Rightarrow R = 20$ cm

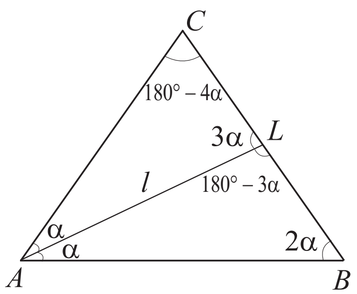
2. $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$

$\Rightarrow a = 2R\sin\alpha = 2.20.\sin 45° = 2.20\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 20\sqrt{2}$

$\Rightarrow BC = a = 20\sqrt{2}$ cm

ЗАДАЧА 2 Ъгълът при основата на равнобедрен триъгълник е 2α, а ъглополовящата на този ъгъл е l. Намерете: а) основата на триъгълника; б) бедрото на триъгълника.

Решение:



а) В $\triangle ABL$ намираме

$\sphericalangle ALB = 180° - 3\alpha$, $\sin(180° - 3\alpha) = \sin 3\alpha$.

За $\triangle ABL$ прилагаме синусовата теорема и получаваме

$\dfrac{AB}{\sin(180° - 3\alpha)} = \dfrac{AL}{\sin 2\alpha} \Rightarrow \dfrac{AB}{\sin 3\alpha} = \dfrac{l}{\sin 2\alpha}$

$\Rightarrow AB = \dfrac{l\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha}$.

б) В $\triangle ABC$ намираме

$\sphericalangle ACB = 180° - 4\alpha$, $\sin(180° - 4\alpha) = \sin 4\alpha$.

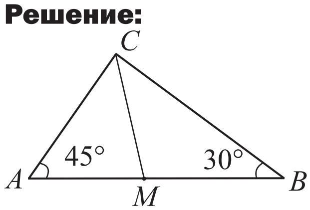
За $\triangle ACL$ прилагаме синусовата теорема и получаваме

$\dfrac{AC}{\sin 3\alpha} = \dfrac{AL}{\sin(180° - 4\alpha)} \Rightarrow \dfrac{AC}{\sin 3\alpha} = \dfrac{l}{\sin 4\alpha}$

$\Rightarrow AC = \dfrac{l\sin 3\alpha}{\sin 4\alpha}$.

ЗАДАЧА 3 В $\triangle ABC$ са дадени $\alpha = 45°$, $\beta = 30°$. Върху страната AB е избрана точка M. Радиусът на описаната около $\triangle AMC$ окръжност е R. Намерете радиуса R_1 на описаната около $\triangle BMC$ окръжност.

Решение:



1. За $\triangle AMC$ прилагаме синусовата теорема

$CM = 2R\sin 45° = 2R\dfrac{\sqrt{2}}{2} = R\sqrt{2}$

2. За $\triangle BMC$ прилагаме синусовата теорема

$CM = 2R_1\sin 30° \Rightarrow R\sqrt{2} = 2R_1\dfrac{1}{2} \Rightarrow R_1 = R\sqrt{2}$

ЗАДАЧИ

1. За $\triangle ABC$ са дадени $AB = 30$ cm и $\gamma = 45°$. Намерете радиуса на описаната около триъгълника окръжност.

2. Радиусът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност е $R = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Намерете ъгъл α, ако $BC = 2$ cm.

3. В $\triangle ABC$ $\alpha : \beta : \gamma = 1 : 3 : 8$. Намерете страната AC, ако $AB = 10$ cm.

4. В окръжност с радиус 7 cm дъгата $\overset{\frown}{AB} = 120°$. Намерете хордата AB.

5. Равнобедрен $\triangle ABC$ с ъгъл при върха 30° има основа $AB = 12$ cm. Върху бедрото BC е взета точка D така, че $\sphericalangle CAD : \sphericalangle DAB = 1 : 4$. Намерете радиуса на описаната около $\triangle ABD$ окръжност.

6. Основата на равнобедрен триъгълник е 10 cm, а ъгълът при основата му е 2α. Намерете ъглополовящата на ъгъла при основата.

7. В $\triangle ABC$ са дадени $AB = 12$ cm и $\gamma = 60°$. Намерете радиуса на описаната около $\triangle ABL$ окръжност, където L е пресечната точка на ъглополовящите в $\triangle ABC$.